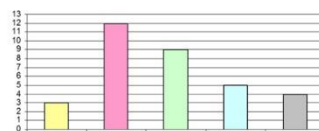
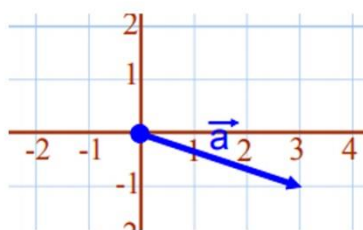




MATEMATIKA

— 4. díl – maturitní obory

– kombinatorika – statistika
– pravděpodobnost – analytická geometrie



$$|AB| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$$

OBSAH

Kombinatorika	Strana 2
Permutace	Strana 3
Variace	Strana 3
Kombinace	Strana 4
Pravděpodobnost	Strana 5
Statistika	Strana 6
Analytická geometrie	Strana 10
Vektory	Strana 11
Přímka	Strana 14

Pascalův trojúhelník

$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

Kombinatorika – počítáme pouze s přirozenými čísly

Základní kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech možností jak zkombinovat uspořádané dvojice, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby.

Celkový počet takových dvojic: $N = n_1 \cdot n_2$

Obecně platí pro uspořádané k -tice.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot \dots \cdot n_k$$

Faktoriál

Faktoriál čísla n je číslo, rovné součinu všech přirozených čísel menších a rovných n . Značení $n!$ Vyslovujeme jako „n faktoriál“.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Permutace

Záleží na pořadí prvků.

Počet uspořádaných n -tic z n prvků.

$$P(n) = n!$$

Variace

Záleží na pořadí prvků.

Variace k -té třídy z n prvků je každá uspořádaná k -tice vytvořená z celkového počtu n prvků, přičemž při výběru záleží na pořadí jednotlivých prvků. Rozlišujeme variace s opakováním a bez opakování.

Variace bez opakování

Počet k -tic vytvořených z celkového počtu n prvků. $k < n$

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Variace s opakováním

Počet k -tic vytvořených z celkového počtu n prvků.

$$V'(k, n) = n^k$$

Kombinace bez opakování

Kombinace se od variací liší tím, že **nezáleží** na pořadí vybraných prvků.

k -členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

$$K(k, n) = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Kombinační číslo

Kombinační číslo je symbol, který označuje počet k -členných kombinací z n prvků.

$$\text{Symbol } \binom{n}{k} \text{ čteme "n nad k".} \quad \binom{n}{k} = K(k, n)$$

Vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320

1. Eva má 4 náhrdelníky, 3 náramky a 5 prstenů. Je nerozhodná, neví jak doplňky zkombinovat. Kolik je všech možností kombinace těchto ozdob.
2. V tanečních hodinách bylo 9 chlapců a 9 dívek. Dvojice se každou lekci střídaly. kolik by muselo proběhnout lekcí aby se prostřídali všichni chlapci se všemi dívkami.
3. Cestujeme z Ostravy přes Prahu do Hamburku a dále do New Yorku. Z Ostravy do Prahy můžeme jet autem nebo vlakem, z Prahy do Hamburku vlakem, autem nebo autobusem. Z Hamburku do NY můžeme zvolit letadlo nebo loď. Kolik je všech možností (variant dopravy) jak uskutečnit cestu z Ostravy do New Yorku?
4. Z těchto symbolů $\times \blacklozenge \triangle \blacksquare$ máme tvořit dvojice. Zakreslete všechny možné dvojice. Zamyslete se, jak rozdílnými způsoby lze přistupovat ke tvorbě takových dvojic.

Permutace

1. Zjednodušte:

$$a) \frac{(n+2)!}{n!} - \frac{2 \cdot (n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$b) \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} =$$

$$c) \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{n!} - \frac{2 \cdot (n+1)!}{(n-1)!} =$$

$$d) \frac{(k-6)!}{(k-8)!(k^2-49)} =$$

$$e) \frac{(x-1)!}{(x-2)!} - \frac{(x+2)!}{x!} - \frac{x \cdot (x+2)!}{(x+1)!} =$$

$$f) \frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!} =$$

2. Vyřešte rovnice:

$$a) \frac{(n+1)!}{n!} = 5$$

$$b) \frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 2$$

$$c) \frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28 \quad [x = 2]$$

$$d) \frac{(n+2)!}{n!} = n^2 + 3n + 2 \quad [n = 5]$$

$$e) \frac{n!}{(n-2)!} = 90 \quad [n = 10]$$

3. Kolika způsoby můžeme v knihovně seřadit 10 knih vedle sebe? (3 628 800)
4. Kolik je pěticeforných čísel vytvořených z čísel 0, 1, 2, 3, 4? (96)
5. Kolik různých přirozených trojiceforných čísel větších než 30 lze sestavit z číslic 2, 4, 6 tak, aby se žádná číslice neopakovala? [4]
6. Kolik čtyřiceforných přirozených čísel větších než 1 500 lze zapsat číslicemi 0, 1, 2, 3, jestliže se v čísle žádná číslice neopakuje? [12]
7. Kolik různých šesticiforných čísel lze zapsat číslicemi 0, 2, 3, 5, 7, 9, nemá-li se žádná číslice opakovat. [600]
8. Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet permutací 5krát. Určete počet prvků. Proveďte zkoušku. [4]
9. Zvětší-li se počet prvků n o dva, zvětší se počet permutací 72krát. Určete n . [7]

Variace

5. Vypočítejte

$$a) V(3,8) - P(4) = [312]$$

$$b) 6 \cdot V(2,10) - P(4) = [516]$$

$$c) 2 \cdot P(3) - 3 \cdot V(3,4) - P(2) = [-62]$$

6. Kolika způsoby seřadíme do pětic písmena A, B, C, D, E, F, H, pokud se znaky neopakují? (2 520)
7. Kolik je dvojiceforných čísel vytvořených z čísel 0, 1, 2, 3, 4, kde se žádná číslice neopakuje? (16)
8. Kolik čtyřiceforných lichých čísel vytvoříme z číslic 5, 6, 7, 8, 9? (375)
9. Kolik je trojiceforných čísel vytvořených z číslic 0, 1, 3, 5, které se nesmí opakovat? (18)
10. Kolika způsoby seřadíme bez opakování do dvojic tyto symboly ♣♦♥♠? (12)
11. Kolik sudých trojiceforných čísel větších než 700, vytvoříme z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? (96)
12. Kolik jednociforných až čtyřiceforných přirozených čísel lze zapsat číslicemi 0, 1, 2, 3, jestliže se v čísle žádná číslice neopakuje? [1031]
13. 7 kamarádů si slíbilo, že si pošlou vzájemně pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic bylo posláno? (42)
14. Kolikerym způsobem může aranžérka vystavit vodorovně vedle sebe 5 různých šampónů? (120)
15. Bezpečnostní kód se tvoří z písmen K L M N O P Q a všech číslic. Kód obsahuje nejprve 3 písmena pak 3 číslice, znaky se mohou opakovat. (Např.: KQQ887). Kolik je variací bezpečnostního kódu? (343 000)
16. Kolik jednociforných až pěticeforných čísel lze sestavit z číslic 0,2,4,5,8,9, jestliže se v čísle žádná číslice neopakuje. [1031]
17. V kódu je na prvním místě jedno z písmen A,B,C nebo D. Na dalších dvou pozicích je libovolné dvojiceforné číslo od 11 do 99. (Existují např. kódy A22, D45 apod.). Určete počet všech takto vytvořených kódů. (356)
18. Kolik je variací kódů tvořených čísly a písmeny (používá se 26 písmen abecedy). Kód začíná a končí písmenem, které se neopakuje. Uprostřed kódu jsou dvě číslice, které se v kódu mohou opakovat. Např.: D55M; A89C; ... (65 000)

$$19. \text{ Kolik prvků dá 30 variací druhé třídy bez opakování? } V(2; n) = 30$$

(6)

$$20. \text{ Z kolika prvků lze vytvořit a) 72 b) 42 variací druhé třídy bez opakování?}$$

(9, 7)

21. Variací druhé třídy z n prvků je šestkrát méně než variací třetí třídy stejného počtu prvků. Z kolika prvků jsou tyto variace bez opakování? (8)

Kombinace

1. Rozhodněte, zdali jsou tvrzení pravdivá či ne.

$$\binom{6}{2} > \binom{8}{2} \quad \binom{7}{2} > \binom{7}{5} \quad \binom{10}{0} < \binom{10}{1} \quad \binom{5}{3} > \binom{4}{2} \quad \binom{28}{27} \leq \binom{29}{1}$$

2. Vypočtěte: a) $K(6,8) + K(3,4) =$ [32]

b) $K(5,6) - K(4,4) =$ [5]

$$\binom{8}{2} + \binom{4}{1} =$$

$$\binom{6}{1} + \binom{4}{0} =$$

c) $3 \cdot K(3,5) + P(5) - \binom{25}{2} =$ [-150]

d) $\sqrt{\binom{13}{11} + \binom{12}{10} - \binom{23}{0} + \binom{25}{25}} =$ [12]

e) $\sqrt{\binom{15}{13} + \binom{10}{7} - \binom{15}{2} - \binom{20}{19}} =$ [10]

3. Při setkání absolventů školy jedné třídy se absolventi přivítali stiskem rukou. Kolik bylo celkem stisknutí rukou, jestliže se sešlo 26 absolventů? [325]
4. Kolik různých 5-členných sportovních družstev lze sestavit z 8 nejlepších sportovců třídy? [56]
5. Kolik šachistů se zúčastnilo turnaje, jestliže víme, že každý účastník sehrál s každým z ostatních po jedné partii a odehrálo se 55 partií. [11]
6. Kolik možností tahů je ve hře šťastných deset, kde se losuje 10 čísel z 80? [1 646 492 110 120]
7. V cukrárně mají 11 druhů zákusků, Jana chce koupit 7 různých kusů. Kolik má možností? [330]
8. V divadelním souboru je 10 mužů a 8 žen. V divadelní hře účinkují 3 muži a 2 ženy, kolik je možností obsazení hry? [3 360]
9. Na letní tábor přijelo 24 chlapců a 12 dívek. V soutěži mají vytvořit družstva, kde jsou 2 chlapci a jedna dívka. Kolik je možností? [3312]
10. Zkoušející má připravených 20 příkladů z aritmetiky a 30 z geometrie. Na písemku chce dát 3 aritmetické a 2 geometrické příklady. Kolik má možností sestavení různých zadání? [495 900]
11. Ve třídě je 18 chlapců a 9 dívek, do soutěže mají vytvořit družstvo složené ze 3 chlapců a 2 dívek. Kolik je možností? [29 376]
12. V balíčku s 32 kartami jsou 4 různé symboly $\clubsuit \diamond \heartsuit \spadesuit$ pokaždé na 8 kartách. Kolik je možností vybrat 8 karet, tak aby s každým symbolem byly právě dvě karty – $\clubsuit \clubsuit \diamond \diamond \heartsuit \heartsuit \spadesuit \spadesuit$ [614 656]
13. Kolikým způsobem je možno sestavit 4člennou delegaci ze třídy o 10 chlapcích a 18 dívkách, mají-li být v delegaci a) 2 chlapci a 2 dívky [6885] b) 1 chlapec a 3 dívky [8160] c) 3 chlapci a 1 dívka [2160]
14. Máte skupinu padesáti lidí – polovina muži a polovina ženy. Kolik existuje různých trojic lidí, pokud nesmí být složeny pouze z jednoho pohlaví (tj. v trojici se nesmí vyskytnout tři muži nebo tři ženy). [15 000]

15. Z kolika prvků lze vytvořit a) 36 b) 66 kombinací druhé třídy? [9, 12]

16. Zmenší-li se počet prvků o 4, zmenší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků třikrát. Kolik je prvků? [10]

17. Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků o 30. Kolik je prvků? [6]

18. Zmenší-li se počet prvků o 5, zmenší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků o 25. Kolik je prvků? [8]

Pravděpodobnost

$P(A)$ Pravděpodobnost náhodného jevu **A** je **číslo**, které je mírou očekávatelnosti výskytu jevu. Náhodným jevem rozumíme opakovatelnou činnost prováděnou za stejných (nebo přibližně stejných) podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě.

$P(A) \in \langle 0; 1 \rangle$ Pravděpodobnost je číslo v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, tzn. **$0 \leq P(A) \leq 1$**
Událost, která nemůže nastat, má pravděpodobnost 0 (jev nemožný), a naopak jistá událost má pravděpodobnost 1 (jev jistý). Někdy se uvádí v %. **$P(A) = 0\%—100\%$**

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \leftarrow m \text{ je počet příznivých výsledků jevu } A$$

$$\quad \quad \quad \leftarrow n \text{ je počet všech výsledků náhodného pokusu}$$

Opačný jev Pravděpodobnost opačného jevu je doplněk pravděpodobnosti výchozího jevu do jedné,
tzn. pokud jev B je opačný k jevu A , pak: **$P(B) = 1 - P(A)$**

Nezávislé jevy Řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, pokud jev A nezávisí na výskytu jevu B a současně pravděpodobnost výskytu jevu B nezávisí na jevu A . Jsou-li jevy A, B nezávislé a mají **nastat oba najednou**, pak pravděpodobnost vypočteme: **$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**
Jsou-li jevy A, B nezávislé a má **nastat jeden nebo druhý**, pak pravděpodobnost vypočteme:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Jaká je pravděpodobnost že při hodu hrací kostkou padne třikrát za sebou šestka? [0,005]
- Z osmnácti lístků označených čísly 01–18 vytáhneme náhodně jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na vytažením lístku bude:
 - sudé číslo
 - číslo dělitelné 3
 - prvočíslo
 - dělitelné 6
- Jaká je pravděpodobnost že při hodu hrací kostkou padne číslo větší než 4? [0,33]
- V tombole je 1000 losů. Jakou pravděpodobnost výhry má účastník, který si koupil 5 losů? [0,005]
- Ve třídě je 15 dívek a 12 chlapců. Vylosujeme tři žáky. Jaká je pravděpodobnost že to budou:
 - 2 chlapci a 1 dívka [0,34]
 - 3 dívky [0,16]
- Student ovládá učivo ČJ na 86%, M na 95%, Ek na 100%, OP na 90%. Jaká je pravděpodobnost, že:
 - neprospěje z Ek [0]
 - prospěje ze všech čtyř předmětů [0,74]
 - neprospěje z M a zároveň z OP [0,005]
 - prospěje z Ek a M a neprospěje z ČJ a OP [0,013]
- Ve třídě je 20 žáků z toho 8 dívek. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném losování 5 žáků,
 - budou samé dívky [0,0036]
 - budou jen chlapci [0,051]
 - bude 1 dívka a 4 chlapci [0,255]
 - 2 dívky a 3 chlapci [0,397]
- Ve skupině je 7 dívek a 6 chlapců. Jaká je pravděpodobnost, že při výběru trojice
 - budou aspoň dvě děvčata [0,44 + 0,12 = 0,56]
 - budou aspoň dva chlapci [0,44]
- Hodíme deseti mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že spadnou všechny na stejnou stranu. [0,00098]

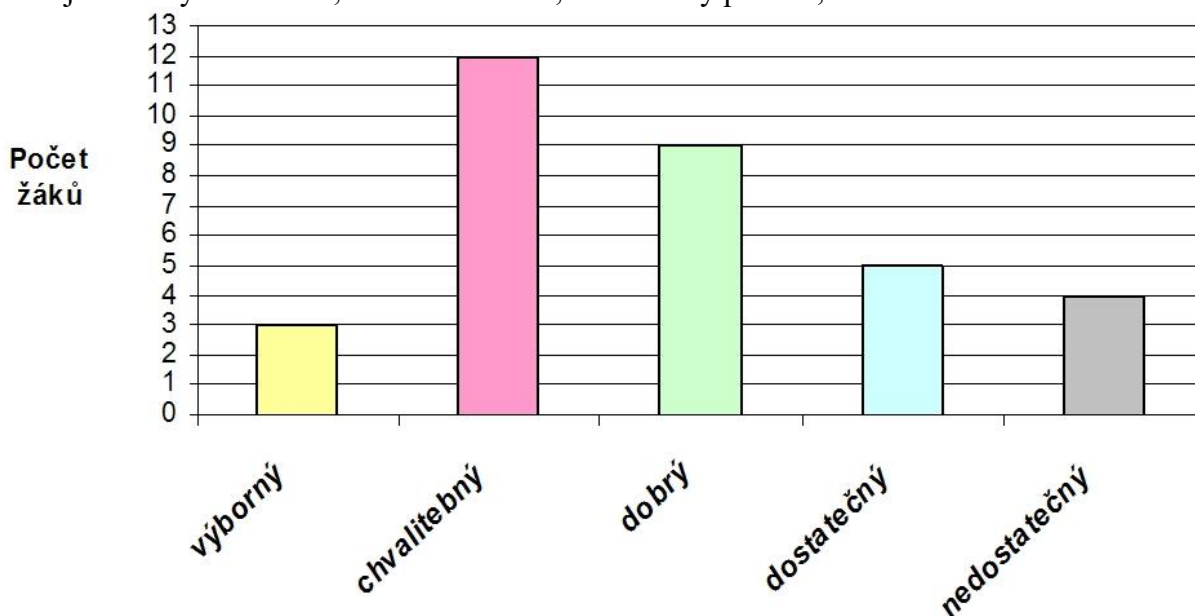
10. Z 32 karet je 16 červených a 16 černých karet. Jaká je pravděpodobnost, že když vybereme 4 karty bude:
 a) 1 červená, 3 černé [0,25] b) 4 černé [0,05] c) 2 červené, 2 černé [0,4]
11. Ve skupině dětí jsou chlapci a dívky. Mezi dívkami jsou blondýnky a tmavovlásky, mezi chlapci taktéž blondáci a tmavovlasí. Děti s jinou barvou vlasů se nevyskytují. Děti soutěží v běhu. Pravděpodobnost, že vyhraje dívka je 0,3. Pravděpodobnost, že vyhrají blondatí děti je 0,4. Pravděpodobnost, že vyhraje blondatý kluk je 0,3.
 Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje tmavovlasá dívka? [0,2]
 Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje nějaký chlapec? [0,7]
 Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje tmavovlasé dítě? [0,6]
 Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje tmavovlasý chlapec? [0,4]

Statistika																							
Statistický soubor	je množina všech objektů statistického pozorování.																						
Statistická data	jsou číselné údaje o hromadných jevech, sledovaných ve velkém počtu případů.																						
Rozsah souboru	n – počet všech prvků statistického souborů.																						
Statistický znak	x – je to společná vlastnost statistických jednotek.																						
Hodnota znaku	$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ – jednotlivé údaje (vlastnosti) znaku.																						
Četnost hodnoty znaku	$n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$ – počet jednotek, které mají stejnou hodnotu.																						
Relativní četnost	v_i – podíl četnosti hodnoty určitého znaku a rozsahu souboru $v_1 = \frac{n_1}{n}, v_2 = \frac{n_2}{n}, \dots$ Relativní četnost můžeme převést na procenta p_i . $p_i \% = v_i \cdot 100$																						
Tabulka rozdělení četností	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x_i</th><th>n_i</th><th>v_i</th><th>$p_i \%$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x_1</td><td>n_1</td><td>v_1</td><td>p_1</td></tr> <tr> <td>x_2</td><td>n_2</td><td>v_2</td><td>p_2</td></tr> <tr> <td>x_3</td><td>n_3</td><td>v_3</td><td>p_3</td></tr> <tr> <td>Celkem</td><td>n</td><td>1,00</td><td>100%</td></tr> </tbody> </table>			x_i	n_i	v_i	$p_i \%$	x_1	n_1	v_1	p_1	x_2	n_2	v_2	p_2	x_3	n_3	v_3	p_3	Celkem	n	1,00	100%
x_i	n_i	v_i	$p_i \%$																				
x_1	n_1	v_1	p_1																				
x_2	n_2	v_2	p_2																				
x_3	n_3	v_3	p_3																				
Celkem	n	1,00	100%																				
CHARAKTERISTIKY STATISTICKÉHO SOUBORU																							
ARIMETICKÝ PRŮMĚR	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n}$		Pokud máme tabulku četností: $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n}$																				
MODUS	Mod(x) – je hodnota znaku, který má největší četnost.																						
MEDIÁN	Med(x) – hodnota prostředního znaku, pokud seřadíme všechny údaje statistického souboru vzestupně podle velikosti. Pokud je n lichý – mediánem je hodnota prostředního znaku. Pokud je n sudý – mediánem je aritmetický průměr dvou prostředních hodnot znaku.																						

1. V jedné firmě byl zpracován statistický soubor zaměstnanců. Statistickým znakem byla výše měsíčního platu. Hodnoty statistického znaku byly rozděleny do intervalů, u každého je dána četnost hodnoty znaku. Nejprve spočítej rozsah souboru. Vypočítejte kolik se celkem vydá měsíčně ve firmě za výplaty. Spočítej relativní četnosti jednotlivých hodnot, aritmetický průměr, modus a medián těchto hodnot.

výše platu	četnost	relativní četnost
13 000 – 19 000	34	
19 001 – 25 000	25	
25 001 – 31 000	3	
31 001 – 37 000	1	
37 001 – 43 000	1	
43 001 – 49 000	2	

2. Graf znázorňuje četnost známek z matematiky. Zjistěte z grafu četnost statistického souboru, četnost jednotlivých známek, relativní četnost, aritmetický průměr, medián a modus.



3. Klasifikaci žáků z matematiky vyjadřuje následující tabulka:
- a) Jaká je průměrná známka z matematiky ve třídě (zaokrouhlete na setiny)?
- b) Kolik chlapců má lepší známku z matematiky, než je průměrná známka dívek?

Klasifikace	1	2	3	4	5
Počet dívek	1	2	5	4	0
Počet chlapců	1	7	7	4	1

4. Ve škole byl zkoumán dva statistické soubory žáků. Statistickým znakem byla hmotnost. Hodnoty statistického znaku byly rozděleny do intervalů, u každého je dána četnost hodnoty znaku. Spočítej nejprve rozsahy souborů. Vypočítejte průměrnou hmotnost chlapců i dívek. Spočítej relativní četnosti jednotlivých hodnot, modus a medián hodnot.
- ($\bar{x} = 73,1$; $mod = 65$; $med = 75$)
- ($\bar{x} = 62,1$; $mod = 55$; $med = 65$)

tělesná hmotnost žáků

kg	chlapci	dívky
40–50	1	10
50–60	11	39
60–70	80	33
70–80	66	9
80–90	22	7
90–100	16	1
100–110	3	1
110–120	1	0

5. V tabulce je uveden počet prodaných aut v jednotlivých měsících. Vypočítejte relativní četnosti v jednotlivých měsících, průměrný měsíční prodej, modus a medián.

Počet prodaných aut		relativní četnost	%
leden	7		
únor	12		
březen	33		
duben	54		
květen	86		
červen	72		
červenec	32		
srpen	31		
září	11		
říjen	9		
listopad	7		
prosinec	6		
celkem			

6. Každý student třetího ročníku si vybral **právě dva** ze čtyř nabízených seminářů A – D. Rozdělení studentů je uvedeno v tabulce. Čísla udávají počty žáků v jednotlivých dvojicích seminářů. (Například semináře A a současně C navštěvuje 16 studentů). V poslední sloupci jsou uvedeny celkové počty studentů v jednotlivých seminářích.

Počet studentů v seminářích	A	B	C	D	Celkem
A			16	0	
B	10		15	7	32
C	16				
D					19

- a) Doplňte všechna prázdná políčka tabulky.
b) Přístup do počítačové sítě mají všichni studenti, kteří navštěvují seminář A nebo seminář B. Kolik studentů má přístup do počítačové sítě?
c) Kolik studentů navštěvuje třetí ročníky?

7. Ve statistickém šetření bylo zjišťováno, kolikrát ročně chodí studenti jedné třídy do knihovny. Výsledky byly zapisovány do tabulky četností návštěv. Z tabulky se ztratil poslední údaj o počtu studentů, kteří navštěvují knihovnu 6 až 8 krát za rok. Vypočítejte tento údaj, pokud víte, že aritmetický průměr vyšel přesně 2 návštěvy na jednoho studenta za rok.

Počet návštěv	Počet studentů
0 – 2	16
3 – 5	3
6 – 8	
Průměrná hodnota $\bar{x}=2$	

8. Mezi studenty v jedné škole udělali průzkum, kolik korun utratí měsíčně za kulturu. Doplňte chybějící údaje v tabulce. Vypočítejte průměrnou útratu jednoho studenta. Zjistěte Modus a Medián.

$$(\bar{x} = 215 \text{ Kč}; \text{mod} = 300 \text{ Kč}; \text{med} = 200 \text{ Kč})$$

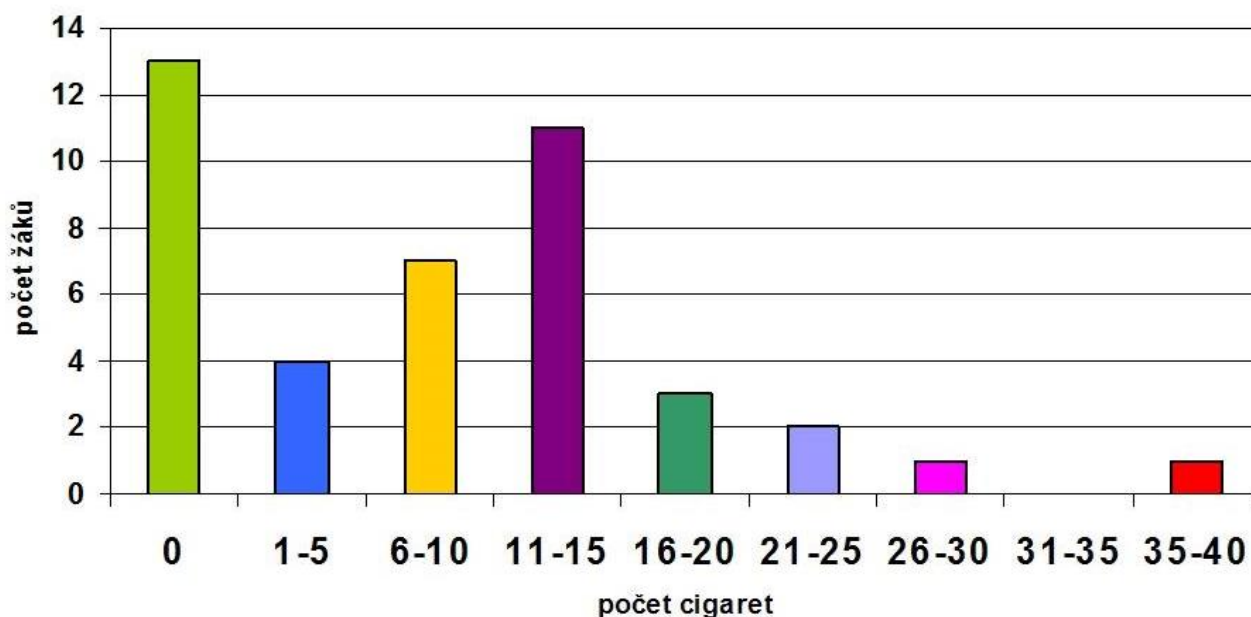
útrata	počet	četnost
100 Kč	33	
200 Kč		25%
300 Kč	36	
400 Kč	6	
Celkem		100 %

9. V jedné třídě si třídní učitel vyrobil přehlednou tabulku shrnující počet neomluvených zameškaných hodin. Výpočtem zjistil, že průměrný počet neomluvených hodin u těchto hříšníků byl přesně $\bar{x} = 3,0$. Jeden údaj v tabulce se však vymazal. Vypočtěte kolik žáků mělo 3 neomluvené hodiny.

počet hodin	počet žáků
2	14
3	
5	2
6	1
10	1

10. Statistickým souborem byli žáci dvou tříd. Statistickým znakem byl počet cigaret, které denně vykouří. Údaje z grafu zapište do přehledné tabulky. Zjistěte průměrnou spotřebu cigaret na žáka, rel. četnost jednotlivých kategorií, pak zjistěte modus a medián. Vypočtěte kolik korun prokouří průměrný student – kuřák za rok, kolik kilogramů dehtu projde jeho plicemi za 1 rok. (1 cig = 10 mg dehtu.)

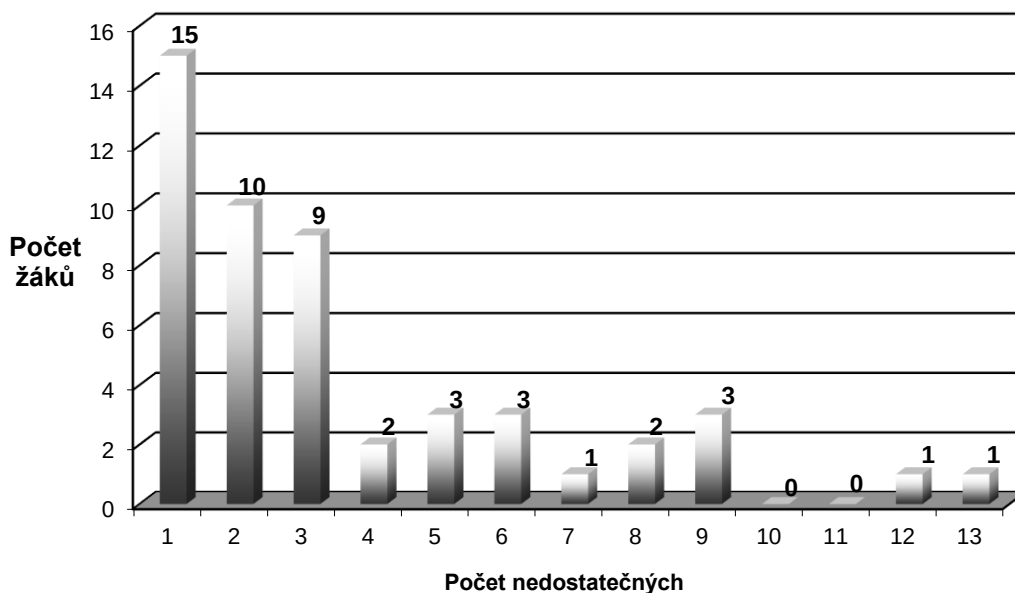
Počet vykouřených cigaret denně



11. Uvedený graf udává počty neprospívajících žáků a počty nedostatečných, které dostali na vysvědčení.

- Zjisti kolik žáků z celkového počtu ve škole neprospělo.
- Kolik žáků mělo 4 a více nedostatečných?
- Zjisti průměrný počet pětek u těchto neprospívajících žáků.
- Zjisti modus.
- Zjisti medián.

Počty nedostatečných ve škole



Analytická geometrie

Body, úsečka

Bod v rovině Bod je dvojice čísel, která reprezentuje souřadnice daného bodu v rovině. Zapisujeme do hranatých závorek $A[a_x; a_y]$ a značíme velkým písmenem.

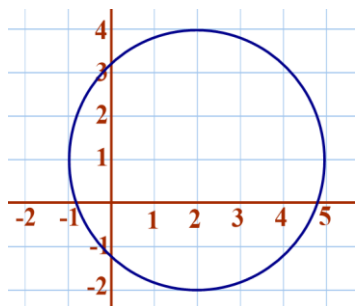
Úsečka Úsečka AB má krajní body A a B. U úsečky můžeme měřit délku, což je vzdálenost mezi jejími krajními body. Pokud mluvíme o délce úsečky AB, zapisujeme: $|AB|$.

Vzdálenost dvou bodů, délka úsečky $A[a_x; a_y], B[b_x; b_y] \quad |AB| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$

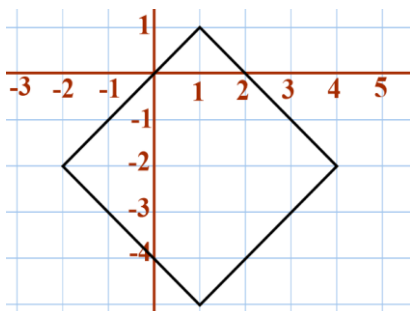
Střed úsečky $S[S_x; S_y] \quad S_x = \frac{a_x + b_x}{2} \quad S_y = \frac{a_y + b_y}{2}$

Souřadnice bodu v rovině, délka úsečky

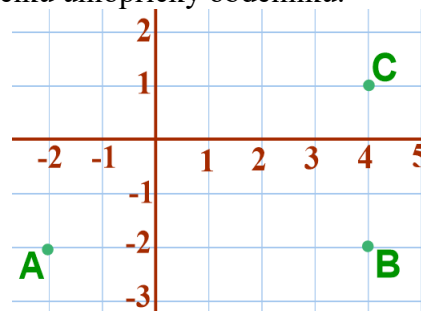
1. Zjistěte souřadnice středu kružnice a vypočítejte obsah kruhu.



2. Zjistěte souřadnice středu čtverce a délku úhlopříček. Pak i délku stran a obsah.



3. Obdélník ABCD je určen třemi body, najděte čtvrtý bod obdélníku. Určete střed obdélníku, запиšte jeho souřadnice, pak určete obvod, obsah a délku úhlopříčky obdélníku.



4. Vypočítejte délku dané úsečky a souřadnice jejího středu

a) **AB**, $A[3, 4], B[5, 2]$ $\{2\sqrt{2}, S[4, 3]\}$

c) **KL**, $K[-4, -1], L[5, -1]$ $\{9, S[0,5; -1]\}$

b) **CD**, $C[3, 0], D[4, 10]$ $\{\sqrt{101}, S[3,5; 5]\}$

d) **PQ**, $P[\sqrt{3}, -1], Q[-\sqrt{3}, 1]$ $\{4, S[0,0]\}$

5. Vypočítejte vzdálenost dvou bodů S, P. Bod S je středem úsečky AB a bod P je středem úsečky CD. $A[7; 3], B[-5; -3], C[-4; 7], D[0; 1]$ $\{5\}$

6. Strany čtverce ABCD jsou rovnoběžné s osami **xy**. Jsou dány body $A[-2; 1], B[3; 1]$. Vypočítejte délku úhlopříčky AC. $\{5\sqrt{2}\}$

7. Bod S je středem úsečky AB. Vypočítejte souřadnice bodu A, pokud známe $B[-4; 3], S[5; 2]$. $\{[14; 1]\}$

8. Je dán jeden krajní bod a střed S úsečky. Určete souřadnice druhého krajního bodu úsečky

e) AB, $A[-3, 6], S[-1, 4]$ $\{[1, 2]\}$

f) PQ, $Q[3; 0,8], S[-1; 0,5]$ $\{[-5; 0,2]\}$

g) TU, $T[-4, 2], S[-0,5; -1,5]$ $\{[3, -5]\}$

9. MN je průměr kružnice k. Vypočítejte souřadnice jejího středu a poloměr, je-li $M[-3,2; 6], N[-7,2; -3,5]$. $\{r=5,15; S[-5,2; 1,25]\}$

10. Vypočítejte obsah a obvod pravoúhlého $\triangle ABC$, je-li $A[5,5; -2,5], B[-3; 5], C[-3; -2,5]$. $\{S = 31,88j^2, O = 27,34j\}$

11. Je dán $\triangle ABC : A[-6,6; 1,2] B[3,4; -5,6] C[2,8; 4,2]$. Vypočítejte délky jeho těžnic.

$\{t_a = 9,88, t_b = 9,85, t_c = 7,77\}$

12. V rovnoběžníku KLMN jsou dány souřadnice vrcholů $K[-6, -3] L[-1, -3] M[2, 5] N[-3, 5]$. Určete délky úhlopříček a souřadnice jejich průsečíku P. $\{KM = 8\sqrt{2}, LN = 2\sqrt{17}, P[-2, 1]\}$

13. Na ose x určete bod E tak, aby byl stejně vzdálen od bodů $F[-1,5; 1]$ a $G[2,5; 3]$. $\{E[1,5; 0]\}$

14. Vypočítejte souřadnice bodu A, který má od bodů $B[4, 6]$ a $C[4, 2]$ vzdálenost $d = 3$.

$\{A_1[4 + \sqrt{5}; 4], A_2[4 - \sqrt{5}; 4]\}$

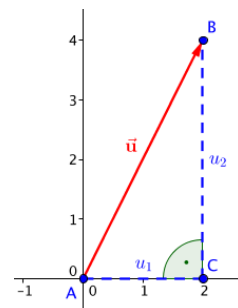
Vektory

$\vec{v}, \vec{v}$

Vektor je veličina charakterizovaná velikostí, směrem a orientací. Často je reprezentovaná graficky jako šipka (orientovaná úsečka).

Umístění vektoru

Zápis $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ nebo $\vec{v} = B - A$ vyjadřuje, že umístěním vektoru je orientovaná úsečka AB. A – počáteční bod. B – koncový bod vektoru.



Souřadnice vektoru

$\vec{u}(u_x; u_y)$

$$\vec{u}(u_x; u_y) \quad u_x = b_x - a_x \quad u_y = b_y - a_y$$

Souřadnice se uvádí do kulatých závorek. Souřadnice vektoru (šipky) udávají souřadnice koncového bodu vektoru, který začíná v počátku souřadnicové soustavy [0; 0].

$\vec{u}(u_1; u_2)$

Opačný vektor

$$\vec{u}(u_x; u_y) \text{ opačný } -\vec{u}(-u_x; -u_y)$$

Velikost vektoru

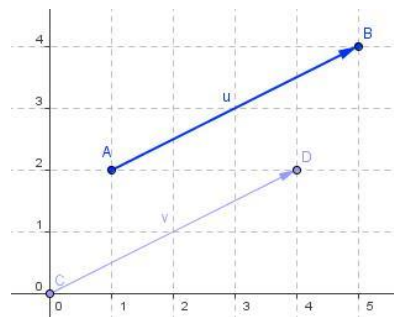
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Skalární součin vektorů

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Kolmost vektorů

Pokud $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pak jsou vektory kolmé.



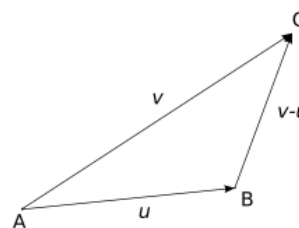
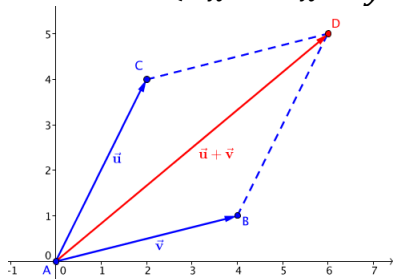
Součet a rozdíl vektorů

$$\vec{u}(u_x; u_y); \vec{v}(v_x; v_y)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y)$$

$$\vec{u}(u_x; u_y); \vec{v}(v_x; v_y)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x; u_y - v_y)$$



Násobení vektoru číslem

$$\vec{u}(u_x; u_y), k \in R \quad k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_x; k \cdot u_y)$$

Rovnoběžné vektory (kolineární)

Vektory $\vec{u}(u_x; u_y); \vec{v}(v_x; v_y)$ jsou rovnoběžné, pokud existuje číslo k , pro které platí $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ $\vec{v}(v_x; v_y) = (k \cdot u_x; k \cdot u_y)$ $v_x = k \cdot u_x; v_y = k \cdot u_y$

Úhel dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Vektory (vektory v následujících cvičeních, jsou označovány buď klasickým způsobem $\vec{u}$, nebo tučnou kurzívou $\mathbf{u}$)

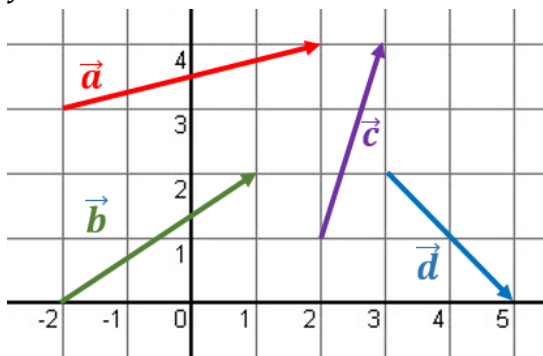
- Je dán vektor $\mathbf{v}(-3; 4)$ $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ $A[5; -3]$
 - Vypočítejte velikost vektoru $\mathbf{v}$ {5}
 - Vypočítejte souřadnice koncového bodu B {[2; 1]}
 - rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}(-1,5; 2)$, $\mathbf{w}(2; 12)$ jsou s daným vektorem $\mathbf{v}$ rovnoběžné. {ano; ne}
- Vypočítejte souřadnice vektoru daného dvěma body a určete jeho velikost. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic Oxy .
 - $\vec{u} = AB$, $A[-4; -5]$, $B[2; 1]$ {(6, 6) , $6\sqrt{2}$ }
 - $\vec{p} = PQ$, $P[-4; 2]$, $Q[-1; -3]$ {(3, -5) , $\sqrt{34}$ }
 - $\vec{e} = EF$, $E[0; -6]$, $F[-2; 0]$ {(-2, 6), $2\sqrt{10}$ }

3. Napiš souřadnice všech vektorů.

Pak souřadnice vektorů:

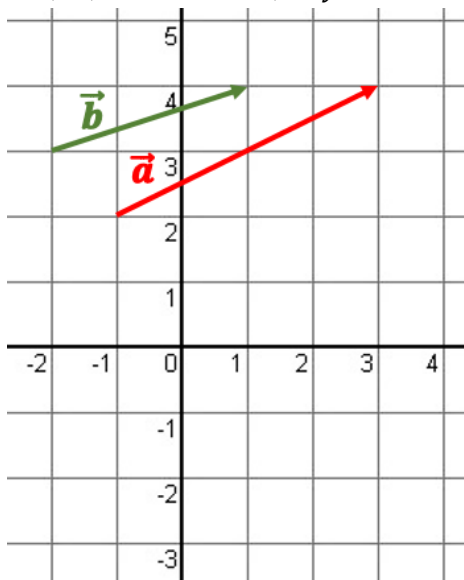
$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{d} - \vec{c}$$



5. Načrtněte součty a rozdíly vektorů a vypište souřadnice vektorů:

$$\vec{a}; \vec{b}; \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}; \quad \vec{y} = \vec{b} - \vec{a}$$



7. Jsou dány souřadnice vektoru a jeho umístění.

Určete neznámé souřadnice.

a) $\vec{z} = (-4; 4)$, $\vec{z} = \overrightarrow{AB}$, $A[5; -3]$, $B[x; y]$

$$\{x = 1; y = 1\}$$

b) $\vec{u} = (-5; 6)$, $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, $C[x; y]$, $D[-4; -5]$

$$\{x = 1; y = -11\}$$

8. Určete, zda jsou vektory kolinéární (rovnoběžné), v kladném případě určete k

a) $\vec{u} = (-5; 6)$, $\vec{v} = (2; -2,4)$ $\{k = -2,5\}$

b) $\vec{g} = (0,75; -5)$ $\vec{h} = (0,6; -4)$ $\{k = \frac{5}{4}\}$

9. Určete neznámou souřadnici vektoru tak, aby vektory byly kolinéární (rovnoběžné)

a) $\vec{u} = (5; -3)$, $\vec{v} = (v_1; 27)$ $\{v_1 = -45\}$

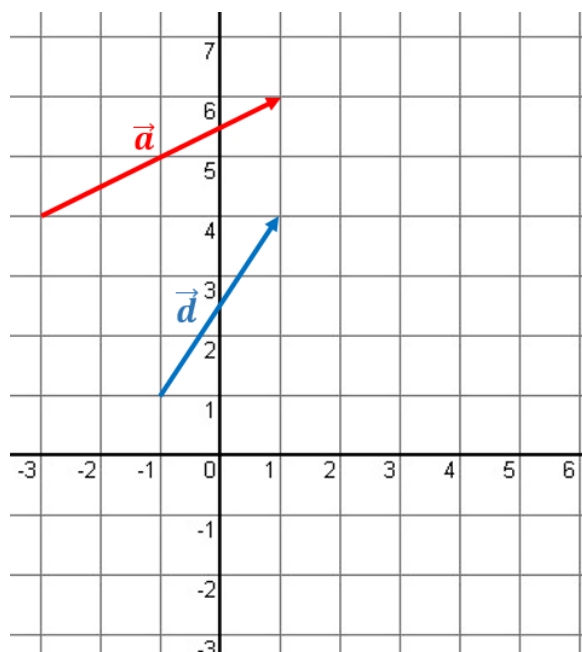
b) $\vec{e} = (7; -2)$, $\vec{f} = (-2; f_2)$ $\{f_2 = \frac{4}{7}\}$

c) $\vec{w} = (\frac{2}{3}; w_2)$; $\vec{s} = (\frac{1}{2}; \frac{3}{20})$ $\{w_2 = \frac{1}{5}\}$

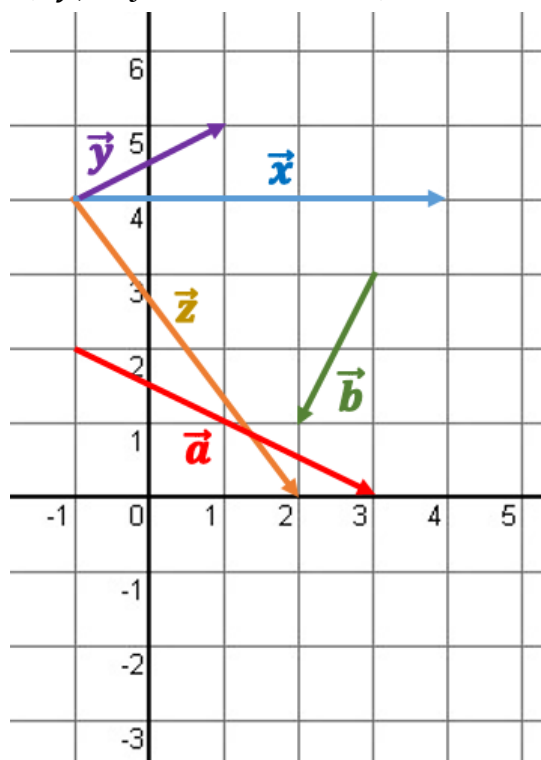
d) $\vec{k} = (k_1; -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\vec{m} = (-2; \frac{1}{3})$ $\{k_1 = 2\sqrt{3}\}$

4. Načrtněte součty a rozdíly vektorů a vypište souřadnice vektorů:

$$\vec{a}; \vec{d}; \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{d}; \quad \vec{y} = \vec{a} - \vec{d}; \quad \vec{y} = \vec{d} - \vec{a}$$



6. Jsou dány vektory na obrázku. Který z vektorů $\vec{x}$; $\vec{y}$; $\vec{z}$ je součet a rozdíl $\vec{a}$; $\vec{b}$?

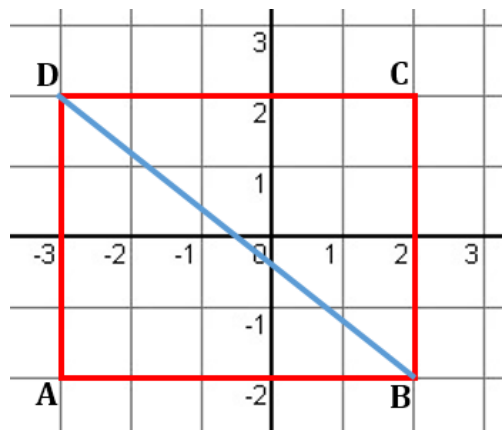
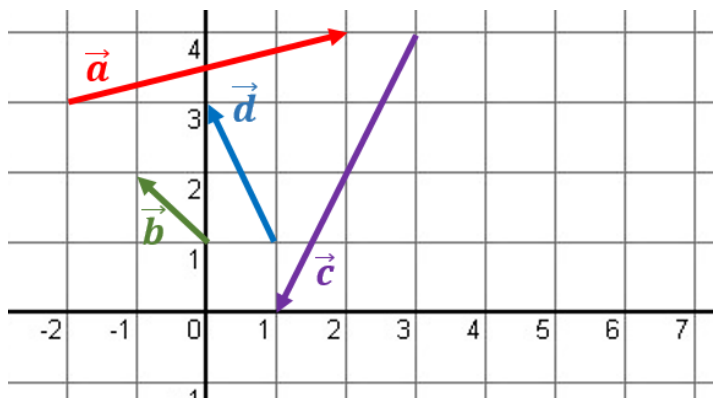


10. Vypočítejte skalární součin vektorů
 a) $\mathbf{a} = (-3; -1)$, $\mathbf{b} = (4; -2)$
 b) $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CD}$ A[-1, 4], B[2, 2], C[0, 2], D[-4, 0]
11. Určete, zda jsou vektory k sobě kolmé
 a) $\mathbf{a} = (-4; 5)$, $\mathbf{b} = (2; \frac{8}{5})$ [jsou kolmé] b) $\mathbf{c} = (5; -6)$, $\mathbf{d} = (-1; 3)$ [nejsou kolmé]
12. Určete neznámou souřadnici tak, aby vektory byly navzájem kolmé
 a) $\mathbf{c} = (\frac{-\sqrt{3}}{2}; 2)$, $\mathbf{d} = (d_1; \frac{\sqrt{3}}{4})$ $\{d_1 = 1\}$ b) $\mathbf{a} = (8; c_2)$, $\mathbf{d} = (-0,5; 3)$ $\{c_2 = \frac{4}{3}\}$
 c) $\mathbf{e} = (1; -5)$, $\mathbf{f} = (\frac{5}{7}; f_2)$ $\{f_2 = \frac{1}{7}\}$ d) $\mathbf{u} = EF$, $\mathbf{v} = AC$, E[1; 2], F[-1; 0], A[2; -1], C[x; 3] $\{x = -2\}$
13. Určete velikost úhlu vektorů
 a) $\mathbf{a} = (3, -5)$, $\mathbf{b} = (10, 6)$ $[90^\circ]$ b) $\mathbf{c} = (\sqrt{2}, -1)$, $\mathbf{d} = (-2, \sqrt{2})$ $[180^\circ]$
14. Vektor $\mathbf{x}$ je dán body $\overrightarrow{AB}$ vektor $\mathbf{y}$ je dán body $\overrightarrow{CD}$. Vypočítejte úhel těchto vektorů.
 a) A [3; -4] B [-1; -1] C [0; -5] D [8; 1]
 b) A [0; 4] B [1; 1] C [1; 2] D [8; 1]
 c) A [-3; 4] B [1; -1] C [2; 3] D [2; 1]
15. Je dán vektor $\vec{u}(-3; 5)$. Určete první souřadnici vektoru $\vec{v}(x; -6)$ tak, aby vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ byly navzájem kolmé.
16. Napište souřadnice vektoru kolmého k danému vektoru. Uveďte alespoň dvě řešení. Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic Oxy.
 a) $\vec{a}(5; 4)$ b) $\vec{b}(\frac{1}{2}; -2)$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{OA}$, A[-4, 2], O – počátek soustavy d) $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$, P[-4, -1], Q[3, 2]

17. $\triangle KLM$ je dán body K[-4; -2], L[8; -2], M[8; 3],
 a) Určete, zda $\triangle KLM$ je rovnoramenný $\{|KL|=12, |LM|=5, |MK|=13 \text{ není}\}$
 b) Určete, zda $\triangle KLM$ je pravoúhlý (užijte Pythagorovu větu) $\{\text{je pravoúhlý}\}$
 c) Vypočítejte délku těžnice vedenou vrcholem M $\{t_m = \sqrt{61}\}$
 d) Vypočítejte velikost vnitřních úhlů $\triangle KLM$ $\{22^\circ 37', 90^\circ, 67^\circ 23'\}$
 e) Vypočítejte obvod a obsah $\triangle KLM$. $\{O=30 \text{ j } S=360 \text{ j}^2\}$
18. $\triangle RST$ je dán body R[-8; 1], S[5; 0], T[1; 4]. Vypočítejte:
 a) délky stran $\{\sqrt{170}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{10}\}$
 b) délku těžnice vedenou vrcholem R $\{S[3,2], t_r = \sqrt{122}\}$
 c) velikost úhlu při vrcholu T $\{\text{asi } 116^\circ\}$
 d) obvod $\triangle RST$ $\{28,18\}$
19. Určete souřadnici x bodu T [x; 6] tak, aby $\triangle TUV$ byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu U, je-li U[2; 3], V[-2; 1] $\{x_T = 0,5\}$

20. Vypočítej délku úhlopříčky a úhel, který svírá úhlopříčka se stranou AB.

21. Sečtěte všechny čtyři vektory.



Přímka

Parametrické rovnice přímky

Směr přímky určuje směrový vektor $\vec{s}(s_x; s_y)$. Bod

$A[a_x; a_y]$ je bodem přímky a t – parametr.

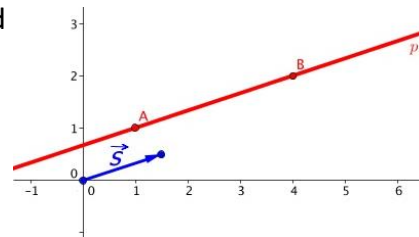
Pak parametrické rovnice přímky jsou:

$$x = a_x + s_x \cdot t$$

$$y = a_y + s_y \cdot t$$

Přímku zadanou dvěma body AB řešíme obdobně.

Z bodů AB určíme směrový vektor $\vec{s} = B - A$



Obecná rovnice přímky

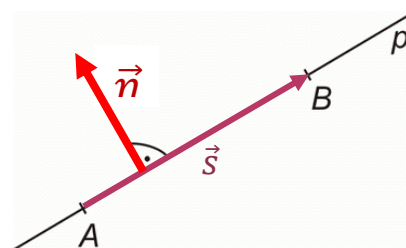
K sestavení obecné rovnice potřebuje znát

normálový vektor přímky $\vec{n}(a; b)$, tento vektor je kolmý k přímce. Pokud není zadán, vytvoříme jej ze směrového vektoru, musí být kolmý k $\vec{s}(b; -a)$.

Obecná rovnice: $ax + by + c = 0$

Koeficient c zjistíme po dosazení libovolného bodu

$A[x; y]$ přímky do neúplně obecné rovnice za x a y .



Směrnice tvar přímky

Získáme převedením z obecné rovnice $ax + by + c = 0$

do tvaru $y = kx + q$ $k = -\frac{a}{b}$ $q = -\frac{c}{b}$

Odchylka dvou přímek

Musíme znát buď směrové vektory, nebo normálové vektory obou přímek. Určuje pak vzájemnou polohu těchto vektorů. Jako odchylka dvou přímek se uvádí úhel $\langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu $M[m_x; m_y]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$, přímka musí být zadána v obecném tvaru.

$$|Mp| = \frac{|a \cdot m_x + b \cdot m_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Parametrické rovnice přímky

1. Určete souřadnice směrového vektoru přímky dané 2 body

a) $s = MN$, $M[-2; 3]$ $N[4; 5]$ $\{s = (6; 2)\}$

b) $s = GH$, $G[-6; 5; -1; 2]$ $H[\frac{1}{2}; -\frac{6}{5}]$ $\{s = (7; 0)\}$

2. Napište parametrické rovnice přímky, je-li dán její bod A a směrový vektor s :

a) $A[5; -6]$, $s = (3; 2)$ $\{x = 5 + 3t, y = -6 + 2t\}$

b) $A[-4; 0]$, $s = (1; -\sqrt{2})$ $\{x = -4 + t, y = -\sqrt{2} \cdot t\}$

3. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází 2 body:

a) $A[2; 4]$, $B[4; 9]$ $\{x = 2 + 2t, y = 4 + 5t\}$

b) $A[0; -4]$, $B[-2; 0]$ $\{x = -2t, y = -4 + 4t\}$

4. Zjistěte, zda body A, B leží na přímce p :

a) $p: x = -2 + 6t, y = 2 + 4t$ $A[10; 10]$, $B[10; 8]$ $\{A \in p, B \notin p\}$

b) $p: x = -1 + t, y = 10 + 4t$ $A[-7; -14]$, $B[-1; -8]$ $\{A \in p, B \notin p\}$

Obecná rovnice přímky

- Určete souřadnice normálového vektoru přímky určené směrovým vektorem
 - $s = (-5; 4)$ $\{n=(4; 5), n=(-4; -5)\}$
 - $s = (2; -5)$ $\{n=(-5; -2), n=(5; 2)\}$
- Přímka je dána obecnou rovnicí. Určete její normálový a směrový vektor.
 - $-3x + y + 2 = 0$ $\{n = (-3; 1), s = (1; 3)\}$
 - $5x - y - 1 = 0$ $\{n = (5; -1), s = (1; 5)\}$
- Určete obecnou rovnici přímky p : (řešíme soustavu rovnic tím, že vyloučíme parametr t a rovnice sečteme)
 - p : $x = 3 - 4t, y = 2 + 3t$ $\{3x + 4y - 17 = 0\}$
 - p : $x = -3t, y = 4 + 5t$ $\{5x + 3y - 12 = 0\}$
 - p : $x = 1 + t, y = -0,4t$ $\{0,4x + y - 0,4 = 0\}$
- Určete obecnou rovnici přímky p , která prochází body K a L
 - K[2; -1], L[3; -2] $\{x + y - 1 = 0\}$
 - K[-7; 8], L[3; -2] $\{x + y - 1 = 0\}$
 - K[3; 2], L[-1; 4] $\{x + 2y - 7 = 0\}$
- Narýsujte přímky, které jsou dány rovnicemi:
 - $3x - 5y + 15 = 0$ postup: najdeme souřadnice 2 bodů přímky z její rovnice tak, že zvolíme jednu souřadnici libovolně
 - $6x - 5y - 30 = 0$ a druhou vypočteme z rovnice, nebo určíme souřadnice 1 bodu přímky a souřadnice směrového vektoru.
- Je dána rovnice přímky p : $3x - 4y + 6 = 0$
 - Ověřte početně, zda body M[2; 3], N[-3; 1] leží na dané přímce. $\{M \in p, N \notin p\}$
 - Napište parametrické rovnice přímky p $\{x=2+4t; y=3+3t\}$
- Δ je určen vrcholy A[-4; 2], B[8; 4], C[0; 8]. Vypočtete rovnice jeho těžnic. $\{x + 2y = 0, 7x - 10y - 16 = 0, 11x - 2y - 16 = 0\}$
- Rovnoběžník je určen vrcholy A[-4; -2], B[2; -4], C[10; 2]. Vypočtete obecné rovnice jeho úhlopříček. $\{2x - 7y - 6 = 0, 4x - y - 12 = 0\}$
- Zjistěte, zda bod M[7,3] leží na ose úsečky AB, A[2; 6], B[4; -2]. $\{osa o: x - 4y + 5 = 0, M \in o\}$
- Napište obecné rovnice strany c, těžnice t_c a výšky v_c v ΔABC , A[3; 2], B[-5; 4], C[-2; 7]. $\{c: x + 4y - 11 = 0, t: 4x + y + 1 = 0, v: 4x - y + 15 = 0\}$
- Určete rovnici přímky, která prochází t_b v ΔABC : A[1; -1], B[5; 1], C[-3; 7]. $\{x + 3y - 8 = 0\}$
- Najděte obecné rovnice všech středních příček ΔABC , A[1; 0], B[4; -3], C[-8; 0]. $\{2x + 2y + 7 = 0, 2x + 8y + 7 = 0, 2y + 3 = 0\}$
- Určete rovnice přímk, na nichž leží strany rovnoběžníku ABCD, jestliže A[-6; 2] B[7; -5] C[5; 2]. $\{7x + 13y + 16 = 0, 7x + 2y - 39 = 0, 7x + 13y - 61 = 0, 7x + 2y + 38 = 0\}$

Vzájemná poloha přímek

Rovnice přímek p_1, p_2	$P_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $P_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Rovnoběžky splývající: $p_1 = p_2$	$a_1 = k \cdot a_2 \wedge b_1 = k \cdot b_2 \wedge c_1 = k \cdot c_2$
Rovnoběžky různé: $p_1 \parallel p_2$	$a_1 = k \cdot a_2 \wedge b_1 = k \cdot b_2 \wedge c_1 \neq k \cdot c_2$
Různoběžky kolmé: $p_1 \perp p_2$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ (skalární součin)
Různoběžky, nejsou kolmé	Neplatí ani jedna z výše uvedených podmínek

Jsou-li přímky rovnoběžné, pak jsou rovnoběžné i jejich směrové (normálové) vektory.

Jsou-li přímky různoběžné, pak mají společný bod tzv. průsečík, jehož souřadnice určíme tak, že řešíme soustavu 2 rovnic (obecné rovnice přímek) o 2 neznámých.

1 řešení - přímky jsou různoběžné $\vee$ 0 řešení - přímky jsou rovnoběžné různé $\vee$ ∞ řešení - přímky jsou splývající

- Určete jaký úhel svírají dvě přímky p_1 a p_2 .
 - $p_1: 4x + 2y + 1 = 0$ $p_2: 2x + y + 8 = 0$ $\{\text{rovnoběžky}, 0^\circ\}$
 - $p_1: x - 2y - 1 = 0$ $p_2: 2x - y + 8 = 0$ $\{37^\circ\}$
 - $p_1: x + 2y + 1 = 0$ $p_2: x + y - 8 = 0$ $\{18^\circ 26'\}$
 - $p_1: 0,5x + 2y - 5 = 0$ $p_2: 2x + 8y - 5 = 0$ $\{\text{rovnoběžky}, 0^\circ\}$
 - $p_1: x + y = 0$ $p_2: x - 8 = 0$ $\{45^\circ\}$
 - $p_1: 5x + 2y = 0$ $p_2: 3x - 2y + 8 = 0$ $\{12^\circ\}$
 - $p_1: x = 1 + 2t, y = 4 - t$ $p_2: 3x - y + 1 = 0$ $\{82^\circ\}$
 - $p_1: x = 1 + 6t, y = 3t$ $p_2: x = 3 - 2t, y = 1 + 4t$ $\{\text{kolmé}, 90^\circ\}$

2. Určete vzájemnou polohu přímek m_1 a m_2 (podle koeficientů rovnic), pokud jsou přímky různoběžné nebo kolmé, určete souřadnice průsečíku. Pokud jsou různoběžné určete úhel, který svírají přímky.
- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| a) $m_1 : 0,5x + 2y - 5 = 0$ | $m_2 : 2x + 8y - 5 = 0$ | {rovnoběžné} |
| b) $m_1 : x - 2y - 4 = 0$ | $m_2 : x = 1 + t, y = -4 + 3t$ | { 45° , P[2; -1]} |
| c) $m_1 : x = 3 - 2t, y = -2 + 5t$ | $m_2 : 5x + 2y - 11 = 0$ | {totožné} |
| d) $m_1 : x - 2y - 3 = 0$ | $m_2 : 2x + y - 11 = 0$ | {kolmé, P[5; 1]} |
| e) $m_1 : 2x - 2y - 1 = 0$ | $m_2 : -x + y + 0,5 = 0$ | {totožné} |
| f) $m_1 : 8x - 4y - 1 = 0$ | $m_2 : x + 2y + 0,5 = 0$ | {kolmé, P[0; -0,25]} |
| g) $m_1 : 4y - 8 = 0$ | $m_2 : x - y = 0$ | { 45° , P[2; 2]} |
| h) $m_1 : x + 2y + 1 = 0$ | $m_2 : 2x + y + 8 = 0$ | { 37° , P[-5; 2]} |
| i) $m_1 : 6x - 8y - 3 = 0$ | $m_2 : y = \frac{3x+1}{4}$ | {rovnoběžky} |
3. Bodem M[3; -5] ved'te přímku. Uved'te parametrické rovnice hledaných přímek. Přímky načrtněte.
- | | |
|--|-------------------------------|
| a) rovnoběžnou s přímkou $p: x = 1 + 3t, y = 3 + 5t$ | { $x = 3 + 3t, y = -5 + 5t$ } |
| b) kolmou k přímce $r: x = -1 + 2t, y = 2 - 7t$ | { $x = 3 + 7t, y = -5 + 2t$ } |
4. Napište obecné rovnice přímek, které procházejí vrcholy Δ a jsou rovnoběžné s protilehlou stranou
- | | |
|---------------------------------|---|
| a) P[9; 7], Q[-7; -3], R[0; -6] | { $3x + 7y - 76 = 0, 13x - 9y + 64 = 0, 5x - 8y - 48 = 0$ } |
| b) M[-1; 7], N[-8; 5], O[0; 0] | { $2x - 7y = 0, 5x + 8y - 51 = 0, 7x + y + 51 = 0$ } |
5. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A $\left[2; -\frac{3}{2}\right]$ a je :
- | | |
|---|---|
| a) kolmá na přímkou $p: 3x - 4y - 12 = 0$ | { $x = 2 + 3t, y = -1,5 - 4t, 8x + 6y - 7 = 0$ } |
| b) rovnoběžná s přímkou p | { $x = 2 + 4t, y = -1,5 + 3t, 3x - 4y - 12 = 0$ } |
6. Určete obecnou rovnici přímky m , která prochází daným bodem a je $\parallel$ s přímkou p :
- | | |
|--|-----------------------|
| a) $p: 3x - y - 2 = 0, B[1; -4], B \in m$ | { $3x - y - 7 = 0$ } |
| b) $p: -6x + 5y - 7 = 0, C[0; 0], C \in m$ | { $-6x + 5y = 0$ } |
| c) $p: x = 3 + 2t, y = 2 - 4t, D[-3; -5], D \in m$ | { $2x + y + 11 = 0$ } |
7. Určete obecnou rovnici přímky r , která prochází daným bodem P a je kolmá k přímce p :
- | | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| a) $p: 2x + 7y = 0, P[-1; -4]$ | { $7x - 2y - 1 = 0$ } |
| b) $p: 1,5x + 2y + 3 = 0, P[-2; -3]$ | { $2x - 1,5y - 0,5 = 0$ } |
| c) $p: x + y + 1 = 0, P[1; 1]$ | { $x - y = 0$ } |
| d) $p: 3x + y - 32 = 0, P[6; 0]$ | { $x - 3y - 6 = 0$ } |
8. Napište parametrické rovnice přímky a , která prochází bodem C[2,5] a je $\parallel$ s přímkou EF, E[3; 7], F[-4; 9]. Rozhodněte početně, zda body K[-5; 7] a L[-1; 3] leží na přímce a . { $x = 2 - 7t, y = 5 + 2t, K \in a, L \notin a$ }
9. Přímka je dána parametrickým vyjádřením $p: x = 2 - 3t, y = 2 + 2t$. Napište parametrickou a obecnou rovnici přímky, která prochází bodem M[1; 2] a je
- | | |
|-----------------------------|---|
| a) rovnoběžná s přímkou p | { $x = 1 - 3t, y = 2 + 2t, 2x + 3y - 8 = 0$ } |
| b) kolmá na přímkou p | { $x = 1 + \frac{4}{3}t, y = 2 + 2t, 3x - 2y + 1 = 0$ } |
10. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek o rovnicích
- | | | | |
|--------------------|------|----------------------------|--------------------|
| $4x - 4y - 12 = 0$ | a je | a) rovnoběžná s přímkou EF | E [4; -5], F[4; 6] |
| $6x + 2y - 50 = 0$ | | b) kolmá k přímce EF | |
11. Stanovte rovnici přímky, která prochází průsečíkem P přímek a, b , kde $a: x - y - 3 = 0, b: 2x + 3y - 11 = 0$ a zároveň
- | | |
|--|------------------------|
| a) je rovnoběžná s přímkou $p: x + 2y - 5 = 0$ | { $x + 2y - 6 = 0$ } |
| b) prochází bodem M[-1; 1] | { $y - 1 = 0$ } |
| c) je kolmá k přímce $q: 5x - 4y - 20 = 0$ | { $4x + 5y - 21 = 0$ } |
12. Napište parametrické rovnice přímky p , která je rovnoběžná s přímkou m a prochází bodem M
- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $m: x = 3 - 4t, y = -5 + t, M[-1; 6]$ | { $p: x = -1 - 4t, y = 6 + t$ } |
| b) $m: x = 1 + t, y = 5 + t, M[1; 1]$ | { $p: x = 1 + t, y = 1 + t$ } |
| c) $m: x = 2t, y = -5 + 3t, M[-3; 6]$ | { $p: x = -3 + 2t, y = 6 + 3t$ } |
13. Přímka p je dána bodem P[3; -5] a směrovým vektorem $s = (-4; 1)$
- | | |
|---|---|
| a) Určete, zda body A[-5; -3], B[2; -1] leží na dané přímce | { $t = 2, A \in p, t = 4, t = 0,25, B \notin p$ } |
| b) Napište parametrické rovnice přímky m , která je rovnoběžná s p a prochází bodem M[-1; 6] | { $x = -1 - 4t, y = 6 + t$ } |
| c) Napište parametrické rovnice přímky n , která prochází počátkem soustavy souřadnic a je kolmá k přímce p . | { $x = t, y = 4t$ } |

Vzdálenost bodu od přímky

1. Určete vzdálenost bodu M od přímky p :

a) $p: 3x - 4y - 14 = 0$ $M[2; 7]$

c) $p: 2x - y + 2 = 0$ $M[-2; -1]$

b) $p: x - 3y = 0$ $M[7; -1]$

d) $p: 4x - 2y - 2 = 0$ $M[-2; 0]$

$$\left\{ a) 7,2; b) \sqrt{10}; c) \frac{\sqrt{5}}{5}; d) \sqrt{5} \right\}$$

2. Určete vzdálenost daných bodů od přímky p :

a) $p: 3x - 4y - 14 = 0$, $B[0; 0]$

$$\{2,8\}$$

b) $p: x = -1 + 2t$, $y = 3 - 5t$ $R[1; -2]$

$$\{0, R \in p\}$$

c) $p: x = 1 - 4t$, $y = 2 + 3t$ $A[2; -5]$

$$\{5\}$$

d) p prochází body $P[-4; 5]$, $Q[11; -3]$, od bodu $M[5; 7]$

$$\{6\}$$

3. Vypočítejte délky všech výšek v ΔABC a pak jeho obsah

a) $A[5; 2]$, $B[1; 5]$, $C[-2; 1]$

$$\{v_c = v_a = 5, v_b = \frac{\sqrt{2}}{2}, S = 12,5j^2\}$$

b) $A[-4; 1]$, $B[5; -2]$, $C[-3; 6]$

$$\{v_a = 3\sqrt{2}, v_b = \frac{24\sqrt{26}}{13}, v_c = 1,6\sqrt{10}, S = 8j^2\}$$

4. Určete vzdálenost rovnoběžek

a) $p_1: 3x - 2y - 4 = 0$

$p_2: 3x - 2y + 2 = 0$

$$\{1,66\}$$

b) $p_1: x + y + 6 = 0$

$p_2: x + y - 4 = 0$

$$\{5\sqrt{2}\}$$

c) $p_1: y = -2x + 5$

$p_2: y = -2x - 1$

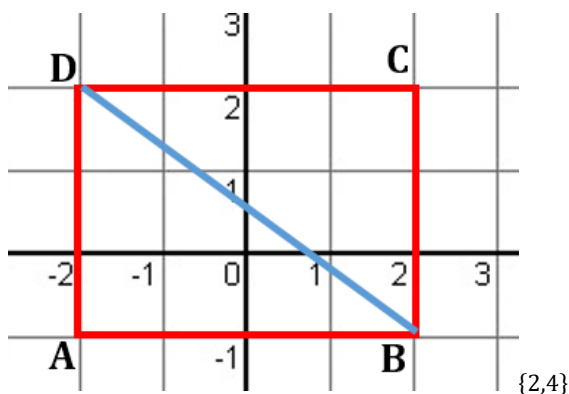
$$\left\{ \frac{6\sqrt{5}}{5} \right\}$$

d) $p_1: x = 4 + 4t$, $y = -3t$

$p_2: y = -0,75x$

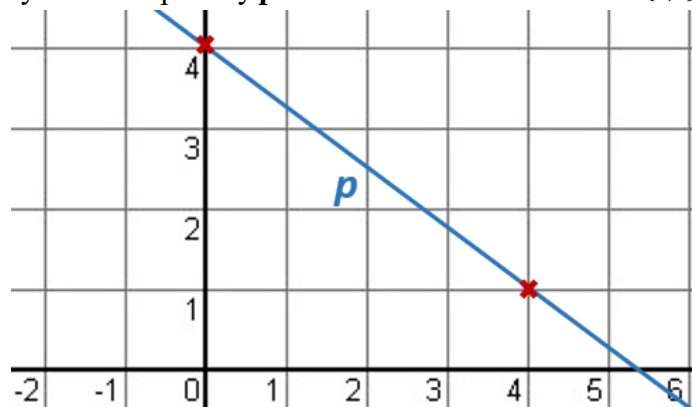
$$\{2,4\}$$

5. Vypočítejte vzdálenost bodu A od úhlopříčky BD.

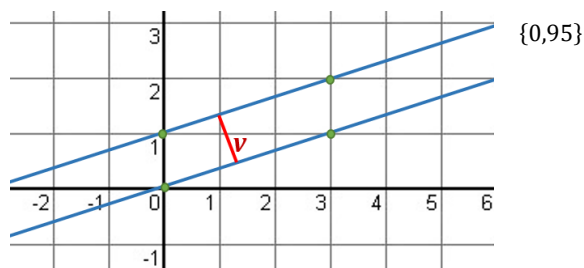


6. Vypočítejte vzdálenost počátku souřadnicového systému od přímky p .

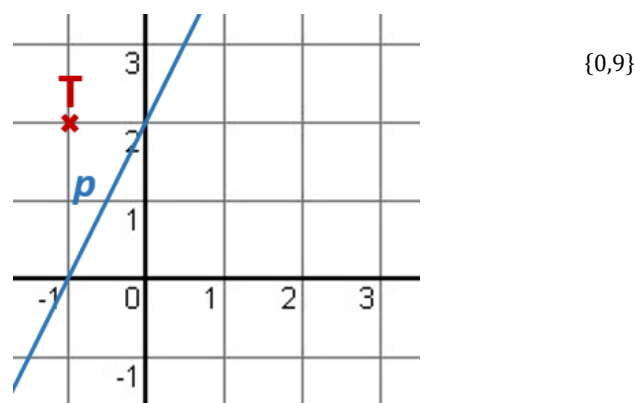
$$\{3,2\}$$



7. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžek p, q .



8. Vypočítejte vzdálenost bodu T od přímky p .



$$\{0,9\}$$

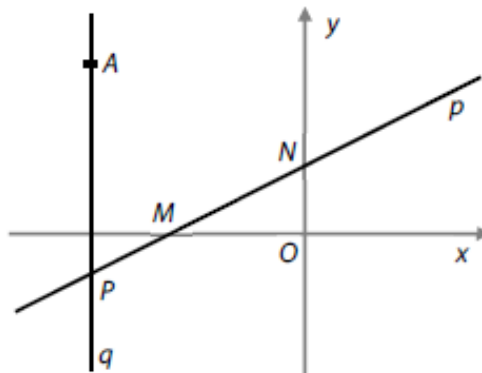
Shrnutí a opakování (CERMAT)

1. Zapište směnicový tvar přímky p a vypočítejte vzdálenost bodů.

V soustavě souřadnic Oxy je zobrazena přímka p , která protíná souřadnicové osy v bodech $M[-4; 0]$ a $N[0; 2]$.

Přímka q je rovnoběžná s osou y a prochází bodem $A[-6; 5]$.

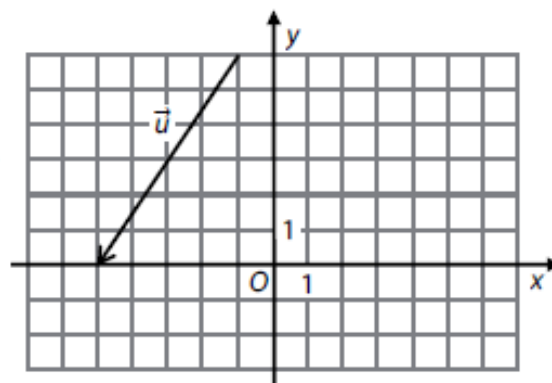
Obě přímky se protínají v bodě P .



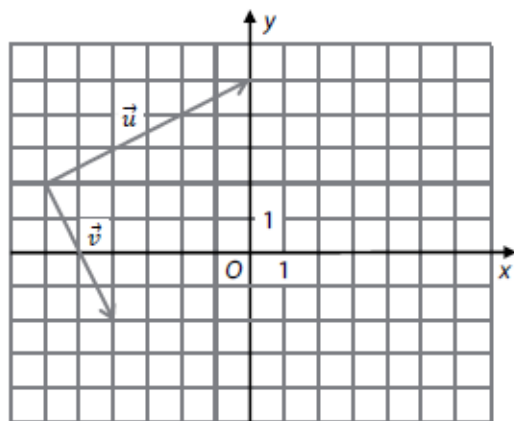
2. Umístěním vektoru $\vec{u}$ je orientovaná úsečka, jejíž počáteční i koncový bod leží v mřížovém bodě.

Vektor $\vec{v} = (x; 10)$ je k vektoru $\vec{u}$ kolmý.

Zjistěte x .



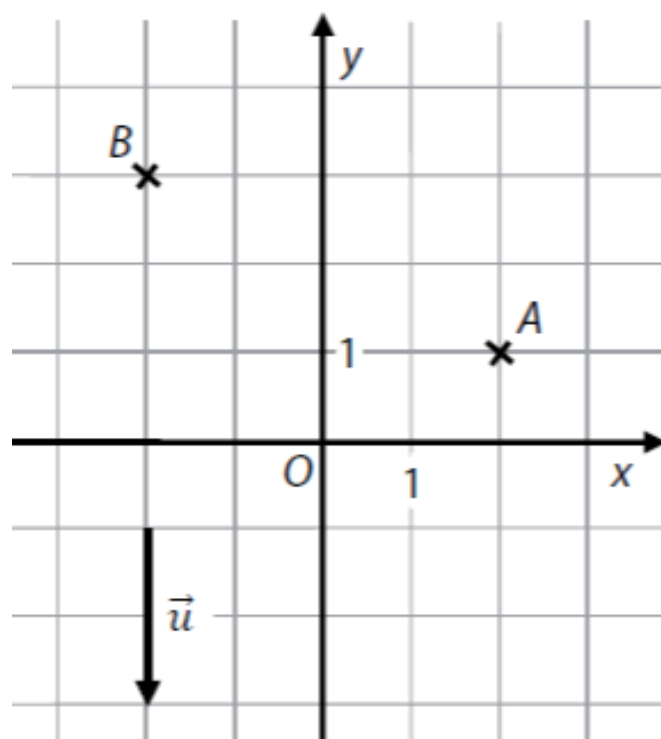
3. Počáteční a koncové body vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou umístěny v mřížových bodech.



Zjistěte souřadnice $\vec{u} + \vec{v}$.

4. Přímka p je určena bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$.
Přímka q prochází bodem B a je kolmá k přímce p .

Sestrojte přímky p , q . Zapište obecnými i parametrickými rovnicemi obě přímky.



(Body A , B i počáteční a koncový bod orientované úsečky, která je umístěním vektoru $\vec{u}$, jsou mřížové body.)