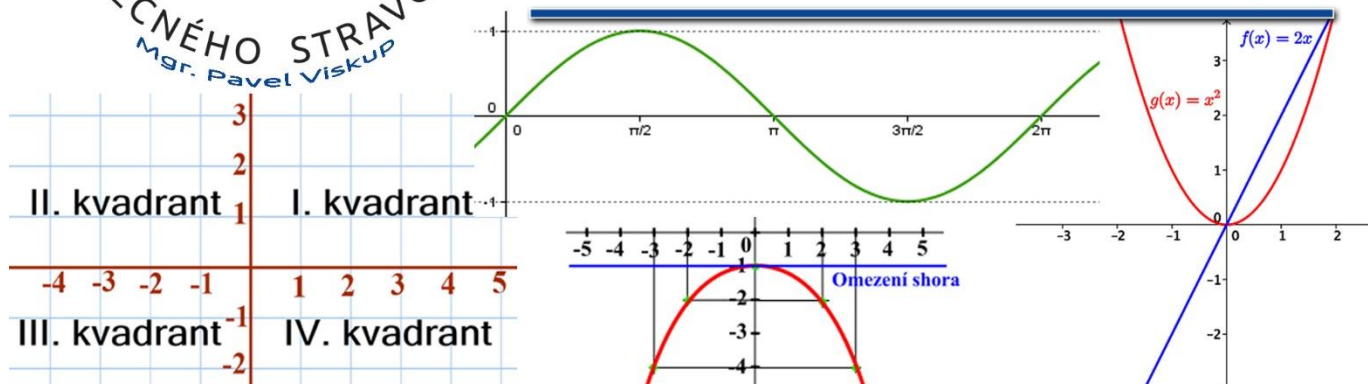


MATEMATIKA

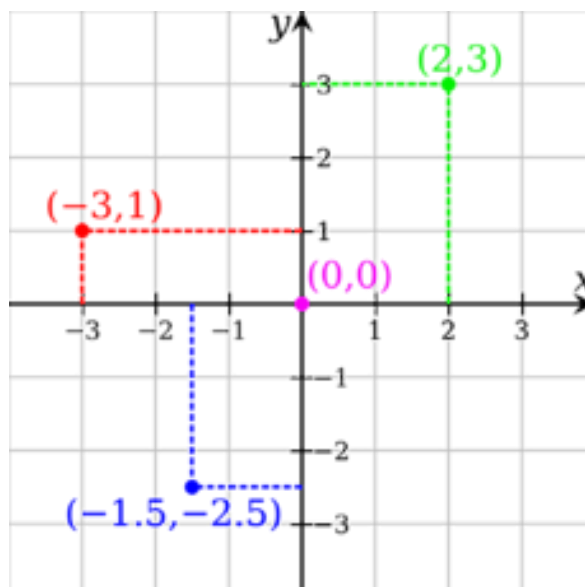
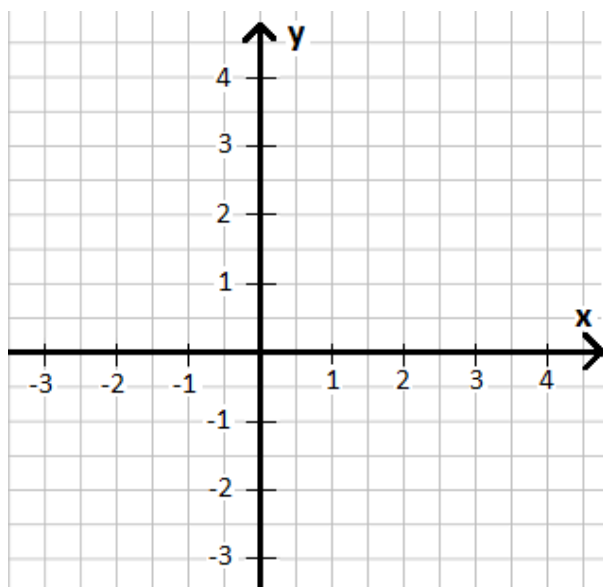
— 3. díl – maturitní obory

Funkce

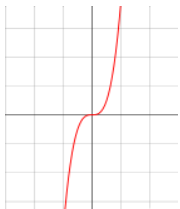


Výsledky některých cvičení jsou uvedeny za příklady v závorkách. [] { } ()

Funkce	2
Funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce	3
Lineární funkce	6
Kvadratické funkce	8
Nepřímá úměrnost a exponenciální funkce	10
Logaritmická funkce	12
Goniometrické funkce	15
Vztahy mezi goniometrickými funkcemi	18
Goniometrické rovnice	18
Posloupnosti	19
Aritmetická posloupnost,	19
Geometrická posloupnost	21
Užití GP, složené úrokování	22



Funkce

Definice funkce	Na <u>množině čísel</u> D je definovaná funkce, je-li dán předpis, podle kterého je každému x náležícímu do množiny D přiřazeno právě jedno číslo y. Značíme: $y = f(x)$ <u>Proměnná</u> x se označuje jako argument funkce (nezávisle proměnná). Proměnná y je funkční hodnota (závisle proměnná). $D(f)$ nazýváme <u>definičním oborem</u> funkce. Pokud není při zadání funkce uveden definiční obor, pak se za definiční obor obvykle považuje množina všech reálných čísel, pro něž má funkce smysl. Množinu všech čísel y nazýváme <u>oborem hodnot</u> dané funkce $H(f)$. $x \in D(f) \quad y \in H(f)$
Zadání funkce	1. Analyticky – rovnicí: $y = f(x)$ 2. Tabulkou – výčtem hodnot. 3. Graficky – křivkou, přímkou, body – v pravouhlé soustavě souřadnic – Oxy Body funkce zapisujeme $[x; y]$
Parita funkce	V matematice se některé funkce označují jako sudé, některé jako liché funkce. Takové funkce vykazují jisté druhy symetrie. Tato symetrie se nazývá parita funkce. Existuje však mnoho funkcí, které nejsou ani liché, ani sudé.
Sudá funkce	Funkce $f(x)$ je sudá funkce, pokud pro všechna x platí $f(x) = f(-x)$. To právě znamená, že graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y. Mezi sudé funkce patří všechny mocninné funkce se sudým mocnitelem a také $y = \cos x$. 
Lichá funkce	Funkce $f(x)$ je lichá funkce, pokud pro všechna x platí $f(-x) = -f(x)$. To právě znamená, že graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Mezi liché funkce patří všechny mocninné funkce s lichým mocnitelem, také $\sin x$, $\tan x$, $\cotg x$. 
Monotonie	Monotonie je vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní, tzn. zda je konstantní, rostoucí, klesající, příp. nerostoucí, či neklesající. Tato vlastnost bývá někdy označována jako monotónnost. Funkce je definována v intervalu I, pokud pro všechna $x_1 < x_2$ z tohoto intervalu platí: $f(x_1) < f(x_2)$ je funkce rostoucí, $f(x_1) > f(x_2)$ je funkce klesající, $f(x_1) \geq f(x_2)$ je funkce nerostoucí, $f(x_1) \leq f(x_2)$ je funkce neklesající, $f(x_1) = f(x_2)$ je funkce konstantní.
Periodická funkce	V matematice je periodickou funkcí taková, která opakuje své hodnoty po určité konečné periodě její proměnné x. Pro funkce to znamená, že celý graf lze vytvořit pomocí kopírování určité části opakované v pravidelných intervalech. Přesněji řekneme, že funkce f je periodická s periodou t, jestliže $f(x + t) = f(x)$

U každé funkce zadané tabulkou určete paritu, monotonii a periodičnost funkce.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

x	-2	-1	0	1	2	3
y	10	15	20	10	15	20

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	3	1	0	1	3	5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-6	-3	0	3	6	9

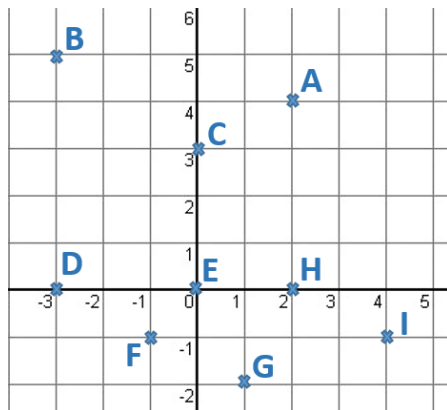
Pravoúhlý systém souřadnic Oxy , funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce

- Narýsujte souřadnicový systém Oxy a pak body $A[-1; 2]$ $B[2; -1]$ $C[0; -3]$ $D[-1,5; 0]$
- Rozhodněte, ve kterém kvadrantu se nachází body $A[0,2;\sqrt{2}]$ $B[-1; -5]$ $C[2; -1]$ $D[-2; 3]$
{kvadranty: A: 1., B: 3., C: 4., D: 2.}
- Přiřaďte každému bodu správnou variantu odpovědi.

- | | |
|--------------|--------------------------|
| A $[-2; -1]$ | 1. leží v I. kvadrantu |
| B $[-2; 0]$ | 2. leží v II. kvadrantu |
| C $[2; 1]$ | 3. leží v III. kvadrantu |
| D $[0; -1]$ | 4. leží v IV. kvadrantu |
| E $[2; -1]$ | 5. leží na ose x |
| F $[-2; 1]$ | 6. leží na ose y |

A	
B	
C	
D	
E	
F	

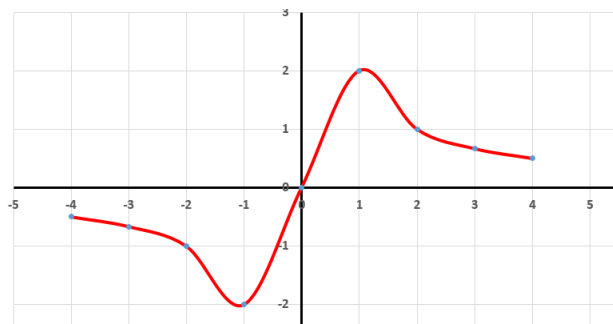
4. Vypište souřadnice všech bodů z obrázku.



5. Urči, ve kterém intervalu je funkce rostoucí a ve kterém klesající. Pokud má funkce extrém urči jeho souřadnice. Ve kterém intervalu $D(f)$ má funkce záporné hodnoty?



- Na obrázku je dána funkce
- Jakou má funkce paritu?
- Určete, zda následující body leží na grafu, pod či nad grafem. $A[0,5; -2]$ $B[-1; -2]$ $C[2; 1]$
 $D[-2; 0]$ $E[-0,5; -1,5]$ $F[-3; 0]$.
- Určete definiční obor funkce.
- Určete obor hodnot funkce.
- Určete intervaly monotonie této funkce.
- Určete, ve kterém intervalu definičního oboru jsou hodnoty funkce kladné.



7. Odpovídejte na následující otázky – ANO / NE

Funkce je sudá.

Funkce je konstantní.

Pro $x \in \langle -2; -1 \rangle$ má funkce kladné hodnoty.

Pro $x \in \langle -2; -1 \rangle$ je funkce klesající.

Pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$ má funkce záporné hodnoty.

Pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je funkce rostoucí.

Funkce protíná osu x v jednom bodě.

Funkce protíná osu y v jednom bodě.

8. Odpovídejte na následující otázky – ANO / NE

Funkce je sudá.

Pro $x \in \langle -2; 1 \rangle$ má funkce kladné hodnoty.

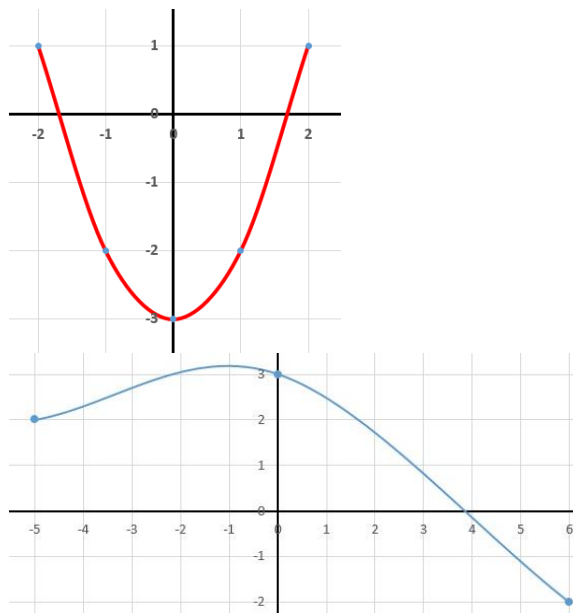
Pro $x \in \langle 0; 4 \rangle$ je funkce klesající.

Pro $x \in \langle 3; 6 \rangle$ má funkce záporné hodnoty.

Pro $x \in \langle -5; -4 \rangle$ je funkce rostoucí.

Funkce protíná osu x v jednom bodě.

Funkce protíná osu y v jednom bodě.



9. Určete, které z bodů A, B, C, D jsou body funkce:

a) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$	A[-2; -1]	B[7; 3]	C[-1; 1]	D[3; $\sqrt{5}$]
b) $y = \sqrt{\frac{x^2-10}{2x-3}}$	A[0; $\sqrt{3}$]	B[4; $\sqrt{1,2}$]	C[1; 3]	D[2; $\sqrt{6}$]
c) $y = \sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}}$	A[-2; 1,5]	B[5; 3]	C[1; $\sqrt{3}$]	D[3; $\sqrt{11}$]
d) $y = \sqrt{x^2-x-2}$	A[0; $\sqrt{2}$]	B[-1; 0]	C[2; 0]	D[-2; 3]
e) $y = \frac{3x-12}{2}$	A[0; -6]	B[-2; 9]	C[2; -3]	D[4; 0]
f) $y = x^2-2x-15$	A[0; -15]	B[-3; 0]	C[5; 0]	D[4; -1]

10. U všech funkcí zjistěte funkční hodnotu v bodech $f(-1)$ a $f(1)$

a) $y = \frac{2x+4}{5}$	$\{ f(-1) = 0,4 / f(1) = 1,2 \}$
b) $y = 2 \cdot (x-5)^2 - 8$	$\{ f(-1) = 64 / f(1) = 24 \}$
c) $y = \frac{3}{2x-1}$	$\{ f(-1) = -1 / f(1) = 3 \}$
d) $y = (x+3)^2 - 4$	$\{ f(-1) = 0 / f(1) = 12 \}$
e) $y = \frac{27}{(x-2)^3} - 2$	$\{ f(-1) = -3 / f(1) = -29 \}$
f) $y = (x+2)^3 + 1$	$\{ f(-1) = 2 / f(1) = 28 \}$
g) $y = (x-1)^2 - 9$	$\{ f(-1) = -5 / f(1) = -9 \}$
h) $y = \frac{1}{x^4} - 1$	$\{ f(-1) = 0 / f(1) = 0 \}$
i) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$	$\left\{ f(-1) = \frac{1}{9} / f(1) = 1 \right\}$
j) $y = \frac{3}{x+2} - 2$	$\{ f(-1) = -5 / f(1) = -1 \}$

11. Zjistí, zda u všech zadaných funkcí patří číslo 10 do oboru hodnot.

Definiční obor u všech funkcí: $D(f) = \langle 2; \infty \rangle$

a) $y = \frac{x-3}{2}$	$\{10\} \in H(f)$	f) $y = (x-1)^3 + 2$	$\{10\} \in H(f)$
b) $y = \frac{2x+4}{5}$	$\{10\} \in H(f)$	g) $y = (x-1)^2 + 9$	$\{10\} \in H(f)$
c) $y = 2 \cdot (x-5)^2 - 8$	$\{10\} \in H(f)$	h) $y = \frac{11}{x^4} - 1$	$\{10\} \notin H(f)$
d) $y = \frac{3}{2x-1}$	$\{10\} \notin H(f)$	i) $y = \frac{1}{(x-1)^2} + 9$	$\{10\} \in H(f)$
e) $y = (x+3)^2 - 6$	$\{10\} \notin H(f)$	j) $y = \frac{3}{x+2} - 2$	$\{10\} \notin H(f)$

12. Zjisti souřadnice průsečíků grafu funkce s osami x a y .

- | | | | |
|---------------------------------|---|--------------------------------|--|
| a) $y = \frac{x-3}{2}$ | $\{X[3;0], Y[0;-1,5]\}$ | g) $y = (x-2)^3 + 1$ | $\{X[1;0], Y[0;-7]\}$ |
| b) $y = \frac{2x+4}{5}$ | $\left\{X[-2;0], Y\left[0;\frac{4}{5}\right]\right\}$ | h) $y = (x-1)^2 - 9$ | $\{X_1[-2;0], X_2[4;0], Y[0;-8]\}$ |
| c) $y = 2 \cdot (x-5)^2 - 8$ | $\{X_1[3;0], X_2[7;0], Y[0;42]\}$ | i) $y = \frac{1}{(x+1)^4} - 1$ | $\{X_1[-2;0], X_2[0;0], Y[0;0]\}$ |
| d) $y = \frac{2}{x-1} + 1$ | $\{X[-1;0], Y[0;-1]\}$ | j) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ | $\left\{X[\text{není}], Y\left[0;\frac{1}{4}\right]\right\}$ |
| e) $y = (x+3)^2 - 4$ | $\{X_1[-5;0], X_2[-1;0], Y[0;5]\}$ | k) $y = \frac{4}{x+2} - 2$ | $\{X[0;0], Y[0;0]\}$ |
| f) $y = \frac{16}{(x-2)^3} - 2$ | $\{X[4;0], Y[0;-4]\}$ | | |

13. Určete $D(f)$ – definiční obor funkce

Nutno znát řešení lineárních nerovnic v podílovém a součinném tvaru, řešení kvadratických nerovnic.

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $y = \frac{56x^8}{x+1}$ | $[D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}]$ |
| b) $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ | $[D(f) = (0; \infty)]$ |
| c) $y = \frac{206}{x-2}$ | $[D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}]$ |
| d) $y = \frac{x+6}{6x-24}$ | $[D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}]$ |
| e) $y = \frac{1}{x^2 + 5x - 24}$ | $[D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3, -8\}]$ |
| f) $y = \sqrt{8x-40}$ | $[D(f) = \langle 5; \infty \rangle]$ |
| g) $y = \frac{1}{x^2 + 8x - 9}$ | $[D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-9, 1\}]$ |
| $y = \sqrt{7-x}$ | $[D(f) = (-\infty; 7)]$ |
| h) $y = \sqrt{\frac{-1}{x-1}}$ | $[D(f) = (-\infty, 1)]$ |
| i) $y = \sqrt{\frac{5}{x-2}}$ | $[D(f) = (2; \infty)]$ |

Konstantní funkce

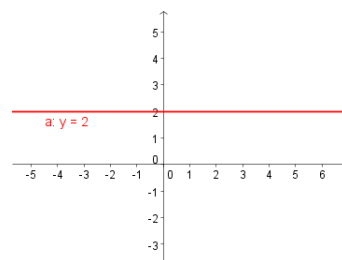
$$y = b$$

$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = b$$

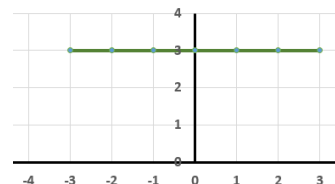
Funkce, jejíž hodnota je na celém oboru hodnot stejná, tedy konstantní.

b – je libovolné reálné číslo. Konstantní funkce není ani rostoucí, ani klesající. Konstantní funkce je sudá. Konstantní funkce je omezená shora i zdola.

Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x .



1. Na obrázku je znázorněna konstantní funkce. Určete definiční obor této funkce, obor hodnot. Zapište funkci rovnicí. Rozhodněte, zdali je funkce sudá nebo lichá. Určete kolik má funkce průsečíků s osami x , y .



Lineární $y = ax + b$

funkce $D(f) = R$

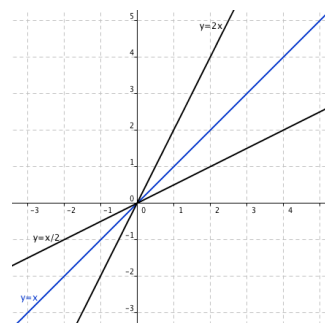
$$H(f) = R$$

Lineární funkce je rostoucí pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$.

Lineární funkce není ani sudá, ani lichá.

Lineární funkce není omezená ani shora, ani zdola.

Grafem lineární funkce je přímka.



Přímá úměrnost

Zvláštní případ lineární funkce. $y = kx$

k je koeficient přímé úměrnosti či **konstanta úměrnosti**.

Lineární funkce

- Určete koeficienty a, b a zapište názvy funkcí určených rovnicemi, uveďte, zda je funkce určená danou rovnicí rostoucí, klesající nebo konstantní:
a) $y = 3x + 5$ b) $y = 0,5x$ c) $y = -2$ d) $y = 1 - 3x$ e) $y = 6x - 1$
f) $y = -3x + 2$ g) $y = -0,5x$ h) $y = 5$ i) $y = \frac{2}{3}x + 1$
- Rovnice funkcí převed'te na tvar převed'te rovnici funkce f na tvar: $y = ax + b$. Zapište koeficienty a, b .
a) $2x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $y - x + 5 = 0$ d) $\frac{y}{3} - 1 = 0$ e) $-3x + y = 1$
f) $6x + 4y = 12$ g) $\frac{4}{3}y - 5 = 0$ h) $5 + \frac{3}{4}y = 0$ i) $y + 2 = 3x$
- Sestrojte grafy funkcí určených rovnicemi:
a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = x + 1$ d) $y = x - 2$ e) $y = -x + 3$ f) $y = -x - 2$
- Sestrojte grafy funkcí nebo jejich částí pro uvedené definiční obory. K danému definičnímu oboru určete měřením v grafu obor hodnot funkce $H(f)$. Uveďte, zda je funkce rostoucí, klesající nebo konstantní. Funkce jsou určeny rovnicí:
a) $y = -x; D(f) = (-\infty; 0)$ b) $y = x + 2; D(f) = R$
c) $y = \frac{x}{2}; D(f) = (0; 4)$ d) $y = 3 - x; D(f) = \langle -3; 1 \rangle$
- Sestrojte grafy funkcí nebo jejich částí pro uvedené definiční obory. K danému definičnímu oboru určete měřením v grafu obor hodnot funkce $H(f)$. Uveďte, zda je funkce rostoucí, klesající nebo konstantní. Funkce jsou určeny rovnicemi:
a) $y = 3x - 1 \quad D(f) = \langle -5; 5 \rangle$ b) $y = -2x + 2 \quad D(f) = (-3; \infty)$
c) $y = 5x - 10 \quad D(f) = \langle 1; 4 \rangle$ d) $y = \frac{2x+1}{2} \quad D(f) = (-\infty; 3)$
e) $y = \frac{x-3}{4} \quad D(f) = R$ f) $y = -1,5x \quad D(f) = R$
- Funkce je určena rovnicí $y = -4x + 3$.
Vypočtete funkční hodnoty $f(0); f(1); f(3); f(10); f(-1); f(-3); f(-0,5); f(-1,5); f(0,5)$.
- Funkce $f(x)$ s $D(f) = R$ je dána rovnicí $y = 2x + 5$
a) vypočítejte hodnoty funkce $f(2); f(0); f(-1)$
b) doplňte následující tabulku:

x	3			0,5
y		7	1	

c) Vypočítejte souřadnice průsečíku grafu funkce f se souřadnicovými osami (pokud existují)
d) Sestrojte graf funkce f
e) Určete pro která $x \in R$ má funkce f nezáporné hodnoty.

8. Funkce $f(x)$ s $D(f) = \langle -1; 5 \rangle$ je dána rovnicí $y = \frac{-x+3}{2}$

a) vypočítejte hodnoty funkce $f(2); f(-1)$

b) doplňte následující tabulku :

x	4		
y		0,25	1

c) Vypočítejte souřadnice průsečíku grafu funkce f se souřadnicovými osami (pokud existují)

d) Sestrojte graf funkce f

e) Určete pro která $x \in R$ má funkce f záporné hodnoty.

9. Zjistěte výpočtem, jaká je vzájemná poloha bodů a grafů funkcí určených rovnicemi, (zda bod je bodem

funkce): $y = \frac{3-x}{4}$ A[3; 0] B[-3; 1] C[6; -0,5]

10. Zjistěte výpočtem, jaká je vzájemná poloha bodů a grafů funkcí určených rovnicemi, (zda bod je bodem

funkce): $y = 1 + \frac{x}{2}$ A[10; 6] B[2; 2] C[0,5; 3,5]

11. Zjistěte výpočtem, jaká je vzájemná poloha bodů a grafů funkcí určených rovnicemi, (zda bod je bodem

funkce): $y = 4x - 5$ A[0; 3] B[1; -1] C[-2; -13] D[-3; 17]

12. Zjistěte výpočtem, jaká je vzájemná poloha bodů a grafů funkcí určených rovnicemi, (zda bod je bodem

funkce): $y = 0,5x + 1$ A[2; 3] B[-2; 7] C[0; 1]

13. Zjistěte výpočtem, jaká je vzájemná poloha bodů a grafů funkcí určených rovnicemi, (zda bod je bodem

funkce): $y = -x + 3$ A[-1; 7] B[-2; 7] C[1; 4]

14. V rovnici funkce určete:

a) číslo a tak, aby bod M [1, -1] ležel na grafu funkce určené rovnicí $y = ax + 4$

b) číslo b tak, aby graf funkce určené rovnicí $y = \frac{3x}{2} + b$ procházel bodem P[-4, 2].

15. Funkce je určena rovnicí $y = ax + 6$. Vypočítejte číslo a tak, aby graf funkce procházel daným bodem:

a) G [5; 11] b) H [-25; 9] c) J [0,5; -5] d) M [2; 0]

16. Bod A [1; 5] je bodem funkce $y = ax + 4$. Vypočítejte koeficient a .

17. Bod Z [2; 5] je bodem funkce $y = 3x + b$. Vypočítejte koeficient b .

18. Bod X [4; 7] je bodem funkce $y = ax - 3$. Vypočítejte koeficient a .

19. Bod M [8; 12] je bodem funkce $y = ax + 4$. Vypočítejte koeficient a .

20. Bod A [-1; 5] je bodem funkce $y = -3x + b$. Vypočítejte koeficient b .

21. Zjistí rovnici lineární funkce, která je zadána dvěma body A[2; 3], B[-2; 4]

22. Zjistí rovnici lineární funkce, která je zadána dvěma body X[0; 8], Y[-4; 0]

23. Zjistí rovnici lineární funkce, která je zadána dvěma body M[5; 5], N[1; 1]

24. Vyjádřete následující závislosti jako funkce a zapište je rovnicí funkce:

a) Závislost obvodu čtverce na délce jeho strany.

b) Závislost délky drátu na teplotě, jestliže se drát o délce 120 m při ohřátí o 1 °C prodlouží o 0,014 m.

c) Závislost stavu krmiva na čase, jestliže se ze zásoby 10 tun denně zkrmí 280 kg.

d) Závislost ujeté dráhy vlaku na čase, jestliže při výjezdu ze stanice měl již za sebou ujetých 60 km a dále jel průměrnou rychlostí 30 km/h.

27. V zemědělském závodě je zásoba 2 000 litrů nafty. Denně se z ní pro provoz vozidel spotřebuje 150 litrů. Zapište rovnicí závislost stavu zásoby nafty na počtu dní. Sestrojte graf této závislosti. Z grafu určete: Na kolik dnů nafta vystačí? Jaká bude zásoba po osmi dnech? Kolikátý den musí být objednána nová nafta, objednávali se při poklesu zásoby na čtvrtinu původního množství?

28. Průměrná spotřeba Škoda Superb je 7 litrů benzínu na 100 kilometrů. Před cestou má řidič v nádrži 38 litrů.

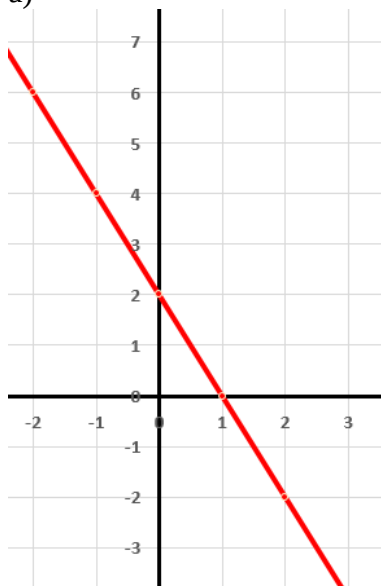
a) Sestavte rovnici závislosti množství benzínu v nádrži (v litrech) na počtu ujetých kilometrů.

b) Po kolika ujetých kilometrech zbývá řidiči v nádrži ještě 5 litrů?

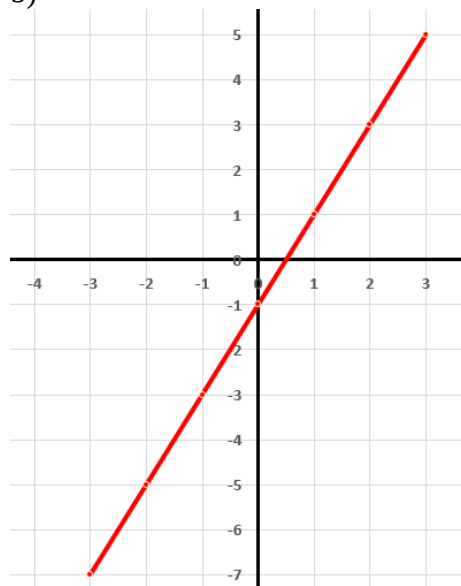
29. U všech funkcí zjistěte rovnice lineárních funkcí. Určete, zda jsou rostoucí či klesající.

Vypište průsečíky funkcí s osami.

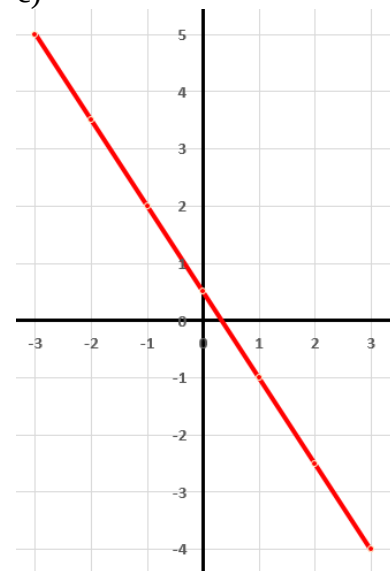
a)



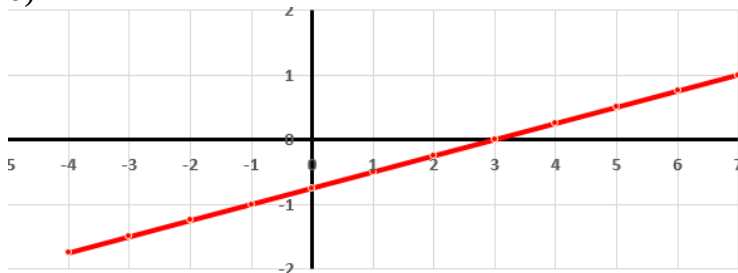
b)



c)



d)



{a) klesající, $y = -2x + 2$; [1;0], [0;2]; b) rostoucí, $y = 2x - 1$; [0,5;0], [0;-1]; c) klesající, $y = \frac{-3x+1}{2}$; [$\frac{1}{3}$;0], [0;0,5]; d) rostoucí, $y = \frac{x-3}{4}$; [3;0], [0; $-\frac{3}{4}$];}

Kvadratická rovnice – opakování

Obecná rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Koeficienty rovnice $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Neznámá je x . Kořeny rovnice jsou pak x_1, x_2 .

ax^2 – kvadratický člen

bx – lineární člen

c – absolutní člen

Diskriminant
kvadratické rovnice

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$ – rovnice má 2 kořeny (2 řešení)

$D = 0$ – rovnice má 1 dvojnásobný kořen (1 řešení)

$D < 0$ – rovnice nemá kořen (nemá řešení)

Kořeny kvadratické
rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Pokud je $D = 0$, použijeme $x = \frac{-b}{2a}$

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ – koeficienty, $a \neq 0$

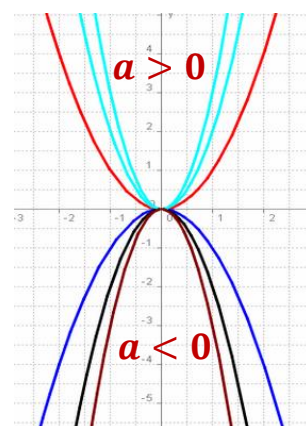
$$D(f) = \mathbb{R}$$

Kvadratická funkce je sudá.

Kvadratická funkce je pro $a > 0$ omezená zdola.

Kvadratická funkce je pro $a < 0$ omezená shora.

Grafem kvadratické funkce je parabola.



Kvadratická funkce, nepřímá úměrnost

1. Stanovte průsečíky grafu funkce s osami x, y

a) $y = 2x^2 - 9x - 5$

b) $y = 2x^2 + 19x - 10$

c) $y = 10x^2 - 7x - 3$

d) $y = 5x^2 - 9x - 2$

e) $y = -x^2 + 3x - 2$

f) $y = -x^2 + x + 30$

2. Zjistěte průsečíky grafu funkce s osami x, y , pak upravte rovnici kvadratické funkce tak, abyste určili souřadnice vrcholu. Poté graf funkce načrtněte.

a) $y = x^2 - 10x + 28$

b) $y = x^2 - 8x + 18$

c) $y = x^2 + 6x + 5$

d) $y = x^2 + 14x + 44$

e) $y = x^2 - 4x + 3$

f) $y = x^2 + 8x + 12$

3. Načrtni graf funkce a u všech funkcí zjisti funkční hodnotu $f(2)$ a průsečík s osou y

$y = -(x-1)^2 + 2$

$y = (x+2)^2 + 4$

$y = -(x-4)^2 + 3$

4. Načrtni graf funkce a u všech funkcí zjisti funkční hodnotu $f(-1)$ a průsečík s osou y

$y = (x+2)^2 + 1$

$y = -(x+1)^2 - 2$

$y = (x+2)^5$

$y = -(x-1)^2 - 1$

5. Vypočítejte souřadnice průsečíků kvadratické a lineární funkce:

a) $f_1: y = x^2 - 4x + 3$ a $f_2: y = 2x - 5$

$\{A[4; 3] B[2; -1]\}$

b) $f_1: y = x^2 + 2x - 3$ a $f_2: y = -2x + 2$

$\{A[1; 0] B[-5; 12]\}$

c) $f_1: y = x^2 - x$ a $f_2: y = 3 - 3x$

$\{A[-3; 12] B[1; 0]\}$

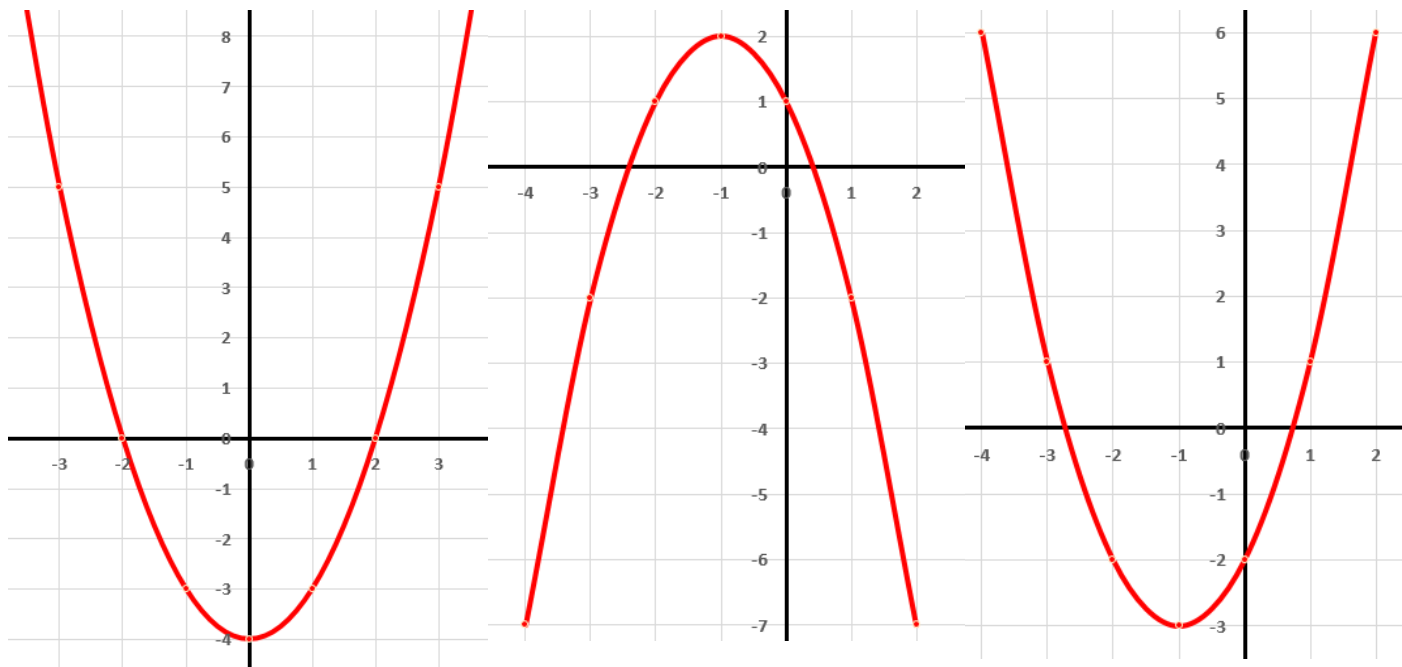
d) $f_1: y = x^2 - 1$ a $f_2: y = -x + 1$

$\{A[-2; 3] B[1; 0]\}$

e) $f_1: y = -x^2 + 2$ a $f_2: y = x$

$\{A[1; 1] B[-1; -1]\}$

6. Určete souřadnice průsečíků s osami, napište rovnice kvadratických funkcí ve tvaru $y = (x - a)^2 + b$



Nepřímá úměrnost

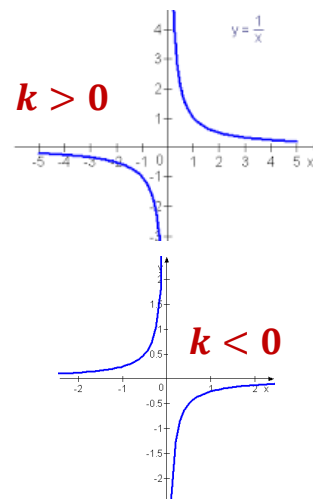
$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R} - \text{koeficient funkce, } k \neq 0$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (všechna čísla kromě nuly).}$$

Funkce je lichá. Grafem funkce je hyperbola, která má dvě větve.

Pro $k > 0$ leží větve hyperboly v I. a III. kvadrantu a je klesající.

Pro $k < 0$ leží větve hyperboly v II. a IV. kvadrantu a je rostoucí.



Nepřímá úměrnost

1. Načrtněte graf funkce a u všech funkcí zjisti funkční hodnotu $f(2)$ a průsečík s osou x a y

$$y = (x-5)^{-1} - 2$$

$$y = \frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{1}{x} + 1$$

2. Načrtněte graf funkce a u všech funkcí zjisti funkční hodnotu $f(1)$ a průsečík s osou x a y

$$y = \frac{1}{x-5}$$

$$y = \frac{1}{x-3} + 1$$

$$y = \frac{1}{x-2} + 2$$

3. Určete koeficient k funkce, pokud víte, že bodem funkce je $A[2; 4]$ a zjistěte průsečík s osou x a y

$$y = \frac{k}{x-1}. \text{ Funkci načrtněte.}$$

4. Určete koeficient k funkce, pokud víte, že bodem funkce je $A[-1; 3]$ a zjistěte průsečík s osou x a y

$$y = \frac{k}{x} + 1. \text{ Funkci načrtněte.}$$

Exponenciální funkce

$$y = a^x$$

$$a \in \mathbb{R} - \text{koeficient, } a > 0, a \neq \{0; 1\}$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

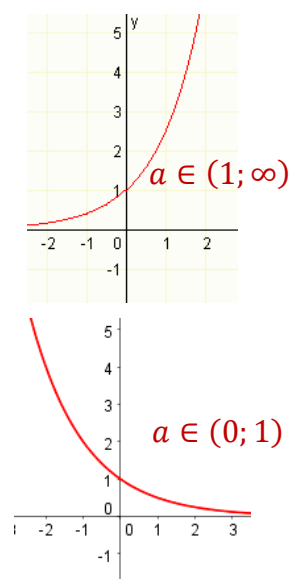
$$H(f) = (0; \infty)$$

Exponenciální funkce není ani sudá ani lichá a je zdola omezená. Prochází vždy bodem $[0; 1]$, protože $a^0 = 1$

Funkce je pro $a \in (1; \infty)$ rostoucí.

Funkce je pro $a \in (0; 1)$ klesající.

Grafem funkce je exponenciála.



Exponenciální funkce

1. Na základě náčrtku grafu exponenciální funkce rozhodni o pravdivosti tvrzení

a) $0,5^{-2} > 1$ {ano} b) $5^{0,25} < 1$ {ne} c) $0,6^{0,3} < 1$ {ano} d) $3,5^{-0,5} > 1$ {ne}

e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{6,24} > 1$ {ne} f) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-6,24} > 1$ {ne}

2. Využijte vlastností exponenciálních funkcí a porovnejte exponenty **p** a **r** – načrtněte graf

a) $1,5^p > 1,5^r$ [$p > r$] b) $\left(\frac{2}{13}\right)^p > \left(\frac{2}{13}\right)^r$ [$p < r$] c) $0,1^{2p} < 0,1^{2r}$ [$p > r$]

3. Pro která **a** je exp. funkce rostoucí?

$$y = \left(\frac{3a+1}{2}\right)^x \quad \left\{ a \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \right\}$$

4. Pro která **a** je exp. funkce klesající?

$$y = \left(\frac{6+a}{5}\right)^x \quad \left\{ a \in (-6; -1) \right\}$$

5. Řešte exponenciální rovnice, proveďte zkoušku

$$(3^x)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$7^x \cdot \frac{1}{7} \cdot 49^x = 1$$

$$\frac{1}{2} = (2^x)^4 \cdot 0,25$$

$$2^x \cdot \frac{1}{8} \cdot 4^x = 1$$

$$8^x \cdot \frac{1}{8} \cdot 64^x = 1$$

$$(4^x)^2 \cdot 0,25 = 16$$

$$25 \cdot 5^x \cdot \frac{1}{5^3} = 1$$

$$(5^x)^3 \cdot 0,2 = \frac{1}{25}$$

6. Řeš exponenciální rovnice, proveďte zkoušku (použijte substituci např.: $2^x = y$)

a) $2^{x+2} - 2^x = 24$ [$x = 3$]

b) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 10$ [$x = 1$]

c) $121^x = 22 + 9 \cdot 11^x$ [$x = 1$]

d) $2^{x+3} - 112 = 2^x$ [$x = 4$]

e) $3^{2x+1} - 3 \cdot 3^{x+2} = 3^x - 9$ [$x_1 = -1, x_2 = 2$]

f) $4^x + 7 \cdot 2^{x-2} = 0,5$ [$x = -2$]

g) $25^x = 0,2 - 4 \cdot 5^{x-1}$ [$x = -1$]

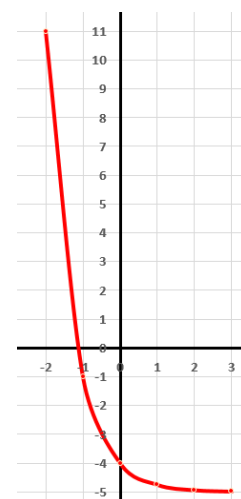
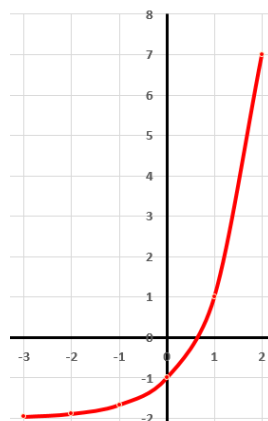
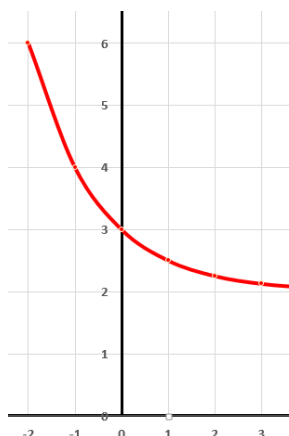
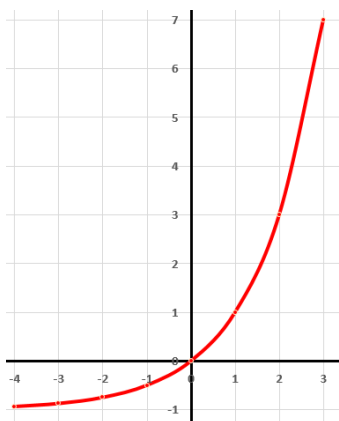
7. Přiřaďte rovnici k odpovídajícímu grafu.

I.

II.

III.

IV.

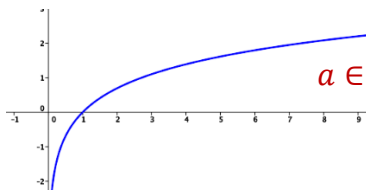
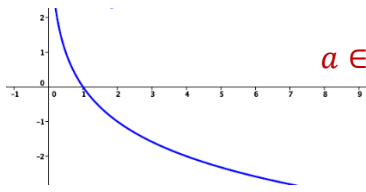


A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

B $y = 3^x - 2$

C $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$

D $y = 2^x - 1$

Logaritmická funkce	$y = \log_a x$ – čteme logaritmus x při základu a. $a \in R$ – koeficient, $a > 0$, $a \neq \{0; 1\}$ $D(f) = (0; \infty)$ $H(f) = R$ Tato funkce je INVERZNÍ k exponenciální funkci, pokud zaměníme x za y a dostáváme definici logaritmu. $x = a^y \rightarrow y = \log_a x$ <u>Logaritmus je exponent</u>, na který musíme umocnit základ, abychom získali argument x. Funkce je pro $a \in (1; \infty)$ rostoucí. Funkce je pro $a \in (0; 1)$ klesající.	 																				
Dekadický logaritmus	Funkce dekadický logaritmus $\rightarrow$ logaritmus při základu 10. Dekadický logaritmus značíme: $\log x$. Zápis $\log_{10} x$ se pro dekadický logaritmus neužívá. <table><tr><td>x</td><td>100 000</td><td>10 000</td><td>1 000</td><td>100</td><td>10</td><td>1</td><td>0,1</td><td>0,01</td><td>0,001</td></tr><tr><td>$\log x$</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td></tr></table>	x	100 000	10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	$\log x$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	
x	100 000	10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001													
$\log x$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3													
Věty o logaritmech	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a(x)^n = n \cdot \log_a x$ Některé vztahy vyplývající z definice logaritmu: $a^0 = 1 \rightarrow \log_a 1 = 0$ $\log_a a^x = x$ $a^1 = a \rightarrow \log_a a = 1$	Výpočet nedekadického logaritmu pomocí dekadických logaritmů $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$																				

Logaritmická funkce

1. Určete logaritmus

a) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36}$ b) $\log_{12} 144$ c) $\log_7 1$ d) $\log_{12} \frac{1}{12}$ e) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ f) $\log_{49} 7$

[a) 2b) 2c) 0d) -1e) -3f) 0,5]

2. Určete logaritmus

a) $\log 100 + \log_4 16 =$ [4] b) $\log_9 81 + \log_2 16 =$ [6]
c) $\log 10000 - \log_5 25 =$ [2] d) $\log_{12} 144 - \log_3 27 =$ [-1]
e) $2 \log 0,01 + \log_8 \frac{1}{64} =$ [-6] f) $\log_5 \frac{1}{125} + 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} =$ [12]
g) $5 \log_7 \frac{1}{7} + 3 \log_{\frac{1}{5}} 25 =$ [-11]

3. Určete číslo x, y, a (definice logaritmu)

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \log_5 x = 2 & \text{b) } \log_2 x = -3 & \text{c) } \log_a \frac{1}{16} = 4 & \text{d) } \log_3 x = -1 & \text{e) } \log_a \frac{1}{1000} = -3 \\ \text{f) } \log_a 8 = -3 & \text{g) } \log_{11} \sqrt{11} = y & \text{h) } \log x = -3 & \text{i) } \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{100} = y & \text{j) } \log_a \frac{1}{16} = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{k) } \log_a 8 = 2 & \text{l) } \log_{\sqrt{3}} x = 2 & \text{m) } \log_3 x = -\frac{1}{2} & \text{n) } \log_a \frac{1}{25} = -2 \\ \left[\text{a) } 25 \text{ b) } \frac{1}{8} \text{ c) } \frac{1}{2} \text{ d) } \frac{1}{3} \text{ e) } 10 \text{ f) } \frac{1}{2} \text{ g) } \frac{1}{2} \text{ h) } \frac{1}{1000} \text{ i) } 2 \text{ j) } 4 \text{ k) } \sqrt{8} \text{ l) } 3 \text{ m) } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ n) } 5 \right] \end{array}$$

4. Určete definiční obor logaritmické funkce:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \log \frac{x}{-5} & [D(f) = (-\infty; 0)] \\ \text{b) } y = \log \frac{2x}{5} & [D(f) = (0; \infty)] \\ \text{c) } y = \log \frac{4}{x-1} & [D(f) = (1; \infty)] \\ \text{d) } y = \log (2x)^4 & [D(f) = \mathbb{R}] \\ \text{e) } y = \log \frac{3-2x}{2x-5} & [D(f) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})] \\ \text{f) } y = \log \frac{2x-3}{5} & [D(f) = (1,5; \infty)] \\ \text{g) } y = \log \frac{x}{x-1} & [D(f) = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)] \\ \text{h) } y = \log (x^2 - 2x + 1) & [D(f) = \mathbb{R}] \end{array}$$

5. Načrtni graf log. funkce, zjisti zda body A, B, C leží na grafu funkce

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } y = \log_3 x - 2 & A[1; -2] & B[9; 0] & C[27; 2] & \{\in, \in, \notin\} \\ \text{b) } y = \log_2 (x-2) & A[1; -2] & B[4; 1] & C[10; 3] & \{\notin, \in, \in\} \\ \text{c) } y = \log_4 (x+12) - 1 & A[-20; 2] & B[4; 1] & C[52; 2] & \{\notin, \in, \in\} \\ \text{d) } y = \log (2x+10) - 3 & A[45; -1] & B[0; -2] & C[-4,5; -3] & \{\in, \in, \in\} \end{array}$$

6. Zjisti průsečíky logaritmické funkce s osami x, y

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \log_3 x - 1 & \{ X[3; 0] & Y[\text{neex.}] \} \\ \text{b) } y = \log_2 (x+8) & \{ X[-7; 0] & Y[0; 3] \} \\ \text{c) } y = \log_2 (x+4) - 1 & \{ X[-2; 0] & Y[0; 1] \} \end{array}$$

7. Na základě grafu log. funkce rozhodni o pravdivosti tvrzení

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_2 7 > \log_2 6 & \{\text{ano}\} & \text{b) } \log_{0,5} 3 < \log_{0,5} 4 \quad \{\text{ne}\} \\ \text{c) } \log_{0,2} 0,75 < 0 & \{\text{ne}\} & \\ \text{d) } \log_5 8 > \log_5 14 & \{\text{ano}\} & \text{e) } \log_3 1,1 < 0 \quad \{\text{ano}\} \end{array}$$

8. Určete logaritmus výrazu (zlogaritmujte)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3xy & [\log 3 + \log x + \log y] \\ \text{b) } \frac{2a}{b} & [\log 2 + \log a - \log b] \\ \text{c) } \frac{a^4}{b^3} & [4\log a - 3\log b] \\ \text{d) } \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{x}} & [\frac{4}{3}\log a - \frac{1}{2}\log x] \end{array}$$

9. Odlogaritmujte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log a + 5\log x - \log 7 & [\log \frac{a \cdot x^5}{7}] \\ \text{b) } \log 7 + 3\log x + 2\log y - \log 5 - \frac{1}{2}\log z & [\log \frac{7x^3y^2}{5\sqrt{z}}] \\ \text{c) } \log_8 9 + \frac{3}{5}\log_8 x + \log_8 6 - \log_8 y - \frac{1}{3}\log_8 z & [\log_8 \frac{54 \cdot \sqrt[5]{x^3}}{y \cdot \sqrt[3]{z}}] \end{array}$$

10. Vypočítejte (nejprve odlogaritmujte, použijte věty o logaritmech)

a) $\log_6 4 + \log_6 9 =$

b) $\log_2 40 - \log_2 5 =$

c) $\log 40 + \log 25 =$

d) $\log_3 54 + \log_3 2 - \log_3 4 =$

e) $\log_2 6 - \log_2 12 =$

f) $\log_2 25 - \log_2 100 =$

g) $\log_5 2 + \log_5 500 - \log_5 8 =$ h) $2 \log_{\frac{1}{3}} \frac{5}{9} + 3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{5} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} =$

[a) 2; b) 3; c) 3; d) 3; e) -1; f) -2; g) 3; h) -2]

11. Vyřešte rovnice:

a) $\log_5 x - \log_5 4 = 1$ [20]

b) $\log_7 x - 4 = \log_{\frac{1}{4}} 16$ [49]

c) $\log_3 2 + \log_3 x = 2$ [4,5]

d) $\log_2 10 - \log_2 x = -2$ [40]

e) $\log_8 x - 5 = \log_{\frac{1}{2}} 8$ [64]

f) $\log x - 3 = \log \frac{1}{10}$ [100]

g) $\log 2x - 1 = \log \frac{1}{100}$ [0,05]

h) $\log_2(x - 2) = \log_3 125$ [10]

i) $\log_7 x - \log_7 3 = \log_7 2$ [6]

j) $\log_2(x^3) = \log 1000000$ [4]

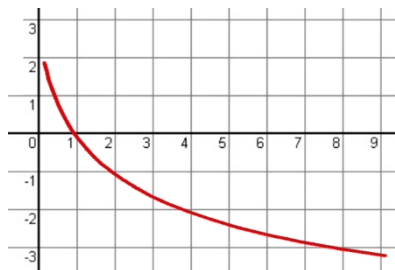
12. Je dána funkce $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$. Zjistěte z grafu funkce, zdali jsou výroky pravdivé či ne.

a) Pro $x \in (0,5; 1)$ jsou hodnoty funkce kladné.

b) Pro $x > 20$ jsou $f(x) > -1$

c) $f(4) = 2$

d) $f(12) < -2$



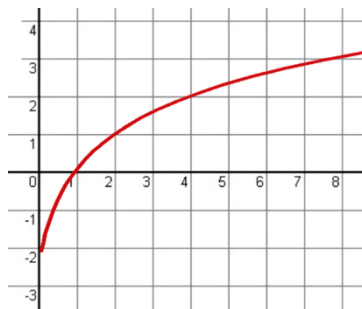
13. Je dána funkce $y = \log_2 x$. Zjistěte z grafu funkce, zdali jsou výroky pravdivé či ne.

a) Pro $x \in (7; 10)$ jsou hodnoty funkce kladné.

b) Pro $x \in (0; 1)$ jsou $f(x) > -1$

c) $f(4) = 2$

d) $f(12) > -2$



14. Je dána funkce $y = \log x$.

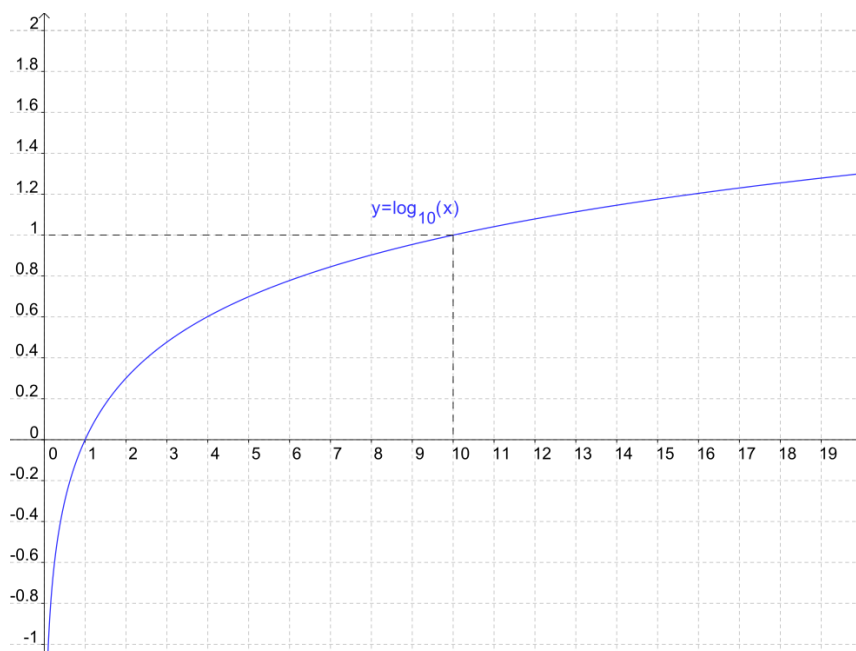
Zjistěte z grafu funkce, zdali jsou výroky pravdivé či ne.

a) $\log 3 < \log 5$

b) $\log 300 > \log 250$

c) $\log \frac{3}{4} < \log \frac{1}{5}$

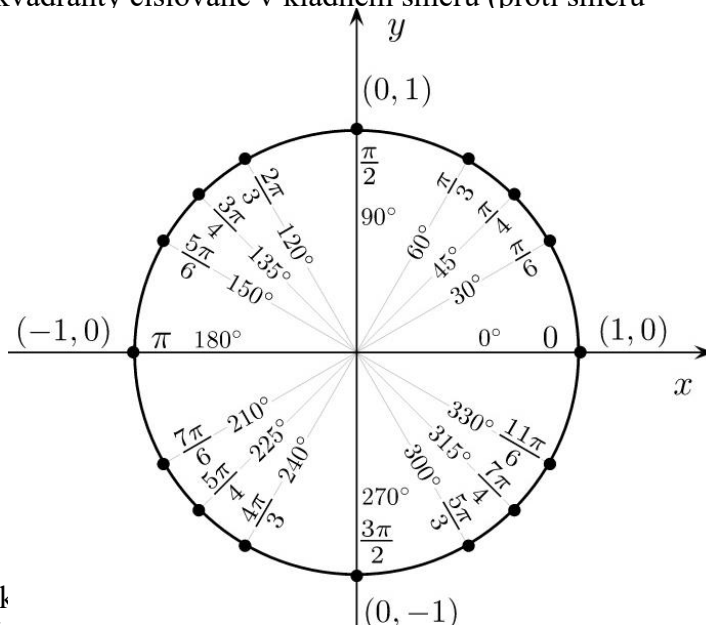
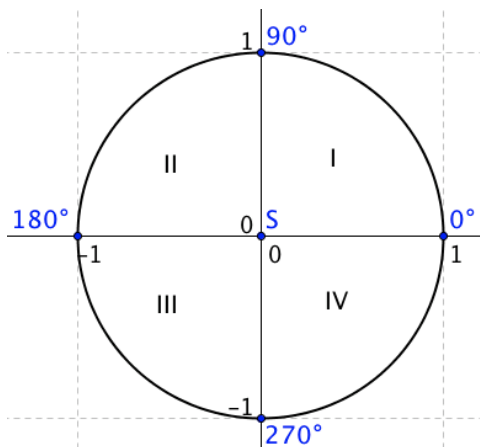
d) $\log 0,3 < \log \frac{1}{3}$



GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Jednotková kružnice, kvadranty

V pravoúhlé soustavě souřadnic narýsujeme kružnici o poloměru 1. Rovina je poloosami rozdělena na 4 kvadranty číslované v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).



Oblouková míra, radián

1 radián je středový úhel, k němuž patří oblouk, jehož délka je rovna poloměru kružnice. Je to jednotkový úhel při měření v obloukové míře.

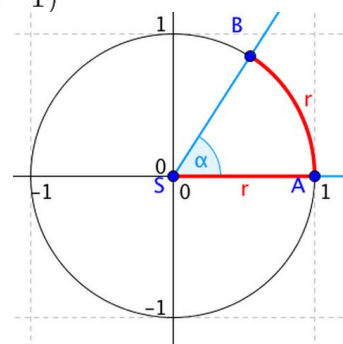
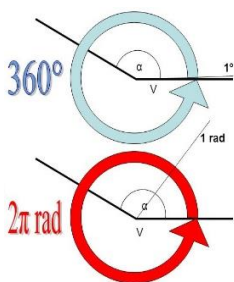
Převod mezi mírou stupňovou a obloukovou
 ω je velikost úhlu v radiánech a α ve stupních
 Plný úhel má 2π radiánů – to je 360 stupňů.

$$\alpha = \frac{180 \cdot \omega}{\pi}$$

$$\omega = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$$

$$1 \text{ (rad)} = \frac{180 \cdot 1}{3,14} \approx 57^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}$$



Jeden radián

Funkce sinus

$$y = \sin x$$

$D(f) = \mathbb{R}$ na ose x - velikost úhlu ve stupních nebo radiánech

$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$ hodnoty funkce

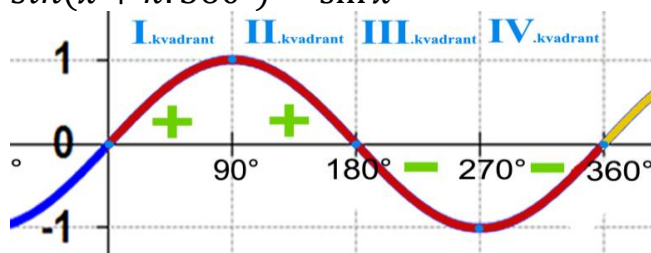
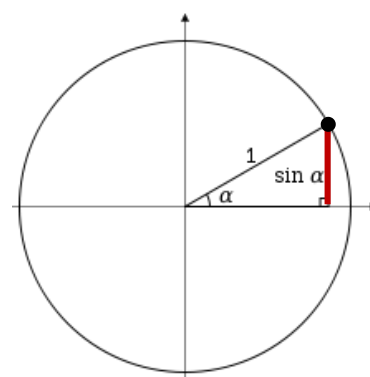
Sinus se definuje na jednotkové kružnici (kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1): Je-li α úhel, který má počáteční rameno v kladné poloose x , je $\sin \alpha$ roven y -ové souřadnici průsečíku této kružnice s koncovým ramenem úhlu α , jinak řečeno, rovná se délce kolmice spuštěné z tohoto bodu na osu x .

Grafem sinu v reálném oboru je sinusoida.

Funkce je lichá $\sin(-x) = -\sin x$

Funkce je periodická s periodou 360° (2π).

$$\sin(x + k \cdot 360^\circ) = \sin x$$



Funkce $y = \cos x$

kosinus $D(f) = R$ na ose x - velikost úhlu ve stupních nebo radiánech

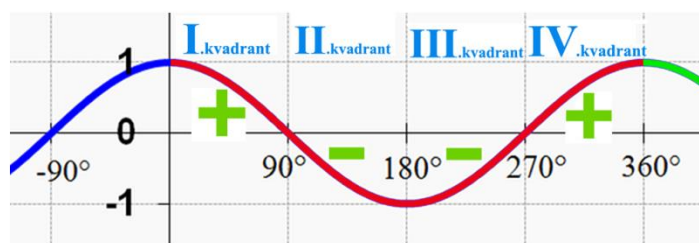
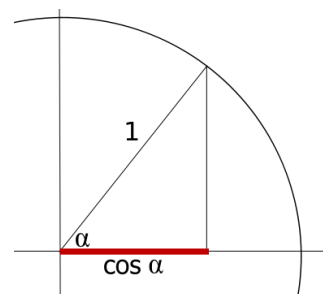
$$H(f) = \langle -1; 1 \rangle \text{ hodnoty funkce}$$

Kosinus se definuje na jednotkové kružnici (kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1): Je-li α úhel, který má počáteční rameno v kladné poloose x , je $\cos \alpha$ roven x -ové souřadnici průsečíku této kružnice s koncovým ramenem úhlu α . Grafem sinu v reálném oboru je sinusoida posunutá po ose x o 90° .

Funkce je sudá **$\cos(-x) = \cos x$**

Funkce je periodická s periodou 360° (2π).

$$\cos(x + k \cdot 360^\circ) = \cos x$$



Funkce tangens

$$y = \operatorname{tg} x = \tan x$$

$D(f) = R - \{90^\circ + k \cdot 180^\circ\}$ pro úhly $90^\circ, 270^\circ, \dots$ není funkce definována

$$H(f) = (-\infty; \infty)$$

V celém definičním oboru je funkce tangens rostoucí. Grafem je tangentoida.

Funkce je lichá: **$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$**

Funkce je periodická s periodou 180° (π).

$$\operatorname{tg}(x + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} x$$

Funkce kotangens

$$y = \operatorname{cotg} x$$

$D(f) = R - \{k \cdot 180^\circ\}$ pro úhly $0^\circ, 180^\circ, \dots$ není funkce definována

$$H(f) = (-\infty; \infty)$$

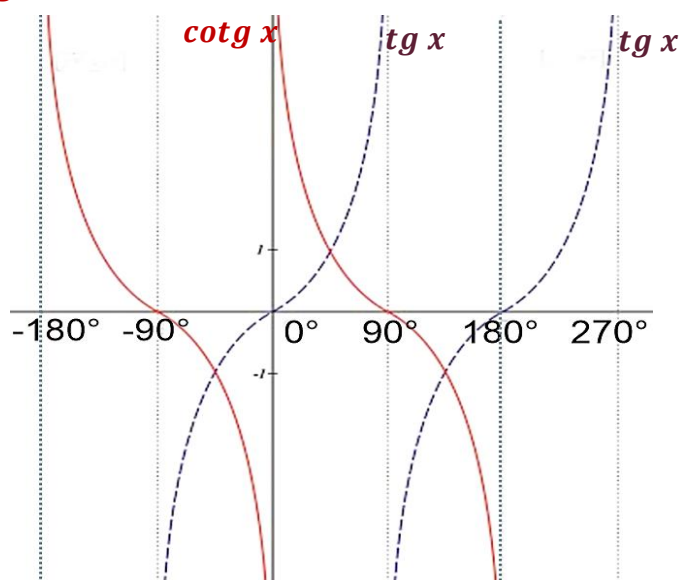
V celém definičním oboru je funkce kotangens klesající. Grafem je kotangentoida.

Funkce je lichá: **$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$**

Funkce je periodická s periodou 180° (π).

$$\operatorname{cotg}(x + k \cdot 180^\circ) =$$

$$\operatorname{cotg} x \quad \operatorname{cotg} x$$



kvadranty	I.	II.	III.	IV.
	(0°; 90°)	(90°; 180°)	(180°; 270°)	(270°; 360°)
sin x	+	+	—	—
cos x	+	—	—	+
tg x	+	—	+	—
cotg x	+	—	+	—
X	$\alpha = x$	$\alpha = 180^\circ - x$	$\alpha = x - 180^\circ$	$\alpha = 360^\circ - x$
Hodnoty funkcí úhlu x vyjádřené pomocí hodnot úhlu α z I. kvadrantu				

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
cotg α		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	

Goniometrické funkce

1. Zjistěte z tabulek bez použití kalkulačků:

$$\begin{array}{llll}
 \sin 225^\circ = & \cos 135^\circ = & \operatorname{tg} 135^\circ = & \operatorname{cotg} 225^\circ = \\
 \sin (-1080^\circ) = & \cos 855^\circ = & \operatorname{tg} (-45^\circ) = & \operatorname{cotg} (-765^\circ) = \\
 \sin \frac{3\pi}{2} = & \cos \frac{5\pi}{6} = & \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = & \operatorname{cotg} \frac{19\pi}{2} = \\
 \sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right) = & \cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right) = & \operatorname{tg} \left(-\frac{9\pi}{4}\right) = & \operatorname{cotg} \left(-\frac{7\pi}{4}\right) =
 \end{array}$$

2. Vypočítejte bez použití kalkulačků

$$\begin{array}{ll}
 \sin 225^\circ \cdot \cos(-45^\circ) \cdot \sin \pi - \sin 240^\circ \cdot \cos 135^\circ + \frac{\sqrt{6}}{4} = & [0] \\
 \cos 135^\circ \cdot \sin 225^\circ + \cos 210^\circ \cdot \sin 120^\circ - \cos 240^\circ \cdot \sin 150^\circ = & [0] \\
 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ + \operatorname{tg}(-60^\circ) - 6 \cdot \cos 360^\circ = & \left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} - 7\right] \\
 3 \cdot (\cos 45^\circ) \cdot 2 - (\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ) - 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin 2\pi = & \left[-\frac{7}{12}\right]
 \end{array}$$

3. Vypočítejte bez použití kalkulačků

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{cotg} 300^\circ + \operatorname{tg} 210^\circ + \operatorname{cotg} 225^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ = & [1] \\
 3 \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{cotg} 135^\circ - 2 \cdot \operatorname{tg} 225^\circ + 2 \cdot \cos 300^\circ = & [-2 - 3\sqrt{3}] \\
 \operatorname{tg} 210^\circ \cdot \operatorname{cotg} 210^\circ - \sin 240^\circ \cdot \operatorname{tg} 240^\circ = & [2,5] \\
 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = & [1]
 \end{array}$$

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$

1. Zjednodušte výrazy:

a) $1 - \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x =$

$[\cos^2 x]$

b) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} =$

$[-1]$

c) $(\sin x - \cos x)^2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x =$

$[0]$

d) $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - \cos x} \cdot \operatorname{tg} x =$

$[-1]$

2. Dokažte, že platí:

a) $\frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$

b) $\frac{\operatorname{cotg} 2x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sin 2x}$

c) $\frac{\operatorname{cotg}^2 x + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$

d) $\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2 \cdot \sin^2 x$

e) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x$

f) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x + 1}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

g) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x$

i) $\cos x + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = -\sin x$

Goniometrické rovnice

3. $\sin x + 2 = 3 - \sin x$

$[30^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ]$

4. $4 \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$

$[30^\circ + k \cdot 180^\circ]$

5. $-(\cos x + 4) = 3 \cdot \cos x$

$[180^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ nebo } \pi + k \cdot \pi]$

6. $\cos(-x) = 3 \cdot \cos x + \sqrt{2}$

$[135^\circ + k \cdot 360^\circ, 225^\circ + k \cdot 360^\circ]$

7. $3 \cdot \cos x = 2 \cdot \sin^2 x$

$[60^\circ + k \cdot 360^\circ, 300^\circ + k \cdot 360^\circ]$

8. $2 \cdot \sin x = 2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \cos^2 x$

$[90^\circ + k \cdot 360^\circ, 217^\circ + k \cdot 360^\circ, 323^\circ + k \cdot 360^\circ]$

9. $\sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

$[15^\circ + k \cdot 360^\circ, 75^\circ + k \cdot 360^\circ]$

10. $2 \cdot \sin^2 x + 7 \cdot \cos x - 5 = 0$

$[60^\circ + k \cdot 360^\circ, 300^\circ + k \cdot 360^\circ]$

11. $2 \cdot \cos x = 1 + 4 \cdot \cos x$

$\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

12. $\cos^2 x - \cos x = 0$

$[0^\circ, 90^\circ, 270^\circ + k \cdot 360^\circ]$

13. $\cos^2 x - 2 \sin x + 2 = 0$

$[90^\circ + k \cdot 360^\circ]$

14. $6 \cdot \sin^2 x + \cos x - 5 = 0$

$[60^\circ, 300^\circ, 109^\circ, 251^\circ + k \cdot 360^\circ]$

15. $\sqrt{2} \cdot \sin x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$

$[0^\circ + k \cdot 180^\circ, 45^\circ + k \cdot 360^\circ, 315^\circ + k \cdot 360^\circ]$

16. $\cos x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x = 0$

$[90^\circ + k \cdot 180^\circ, 135^\circ + k \cdot 180^\circ]$

17. $\cos^2 x + 7 \cdot \cos x + 6 = 0$

$[180^\circ + k \cdot 360^\circ]$

18. $\sin^2 x + 3 \cdot \sin x - 2 = 2$

$[90^\circ + k \cdot 360^\circ]$

Posloupnosti

1. Určete členy posloupnosti a_2 ; a_3 ; a_{10} :

$$a_n = \left(\frac{n^2 - n^3}{n-1} \right)_{n=2}^{\infty} \quad [-4; -9; -100] \quad a_n = \left(\frac{n^2 - 4}{2n} \right)_{n=1}^{\infty} \quad \left[0; \frac{5}{6}; \frac{24}{5} \right]$$

2. Určete první 3 členy posloupnosti: $\left(2^n + \frac{n}{4} \right)$

$$[2,25; 4,5; 8,75]$$

3. Určete kolikátý člen posloupnosti má hodnotu 10.

$$\text{a) } (2n - 6) \quad \text{b) } \left(\frac{n^2 - 5}{2} \right) \quad \text{c) } (n^2 - 5n + 16) \quad [a)8; b)5; c) 2; 3]$$

4. Vypočítejte hodnoty daných členů posloupnosti dané rekurentně:

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n - 2 \quad a_1 = 2 \quad a_2; a_3; a_4 = ? \quad [-3; -0,5; -1,75]$$

$$a_n = 2a_{n-1} - 1 \quad a_3 = 7 \quad a_1; a_5 = ? \quad [2,5; 25]$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad a_3 = -1; a_4 = 4 \quad a_1; a_5 = ? \quad [20; 13]$$

Aritmetická posloupnost

a_n – n-tý člen posloupnosti

a_1 – první člen posloupnosti

$$a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad a_5 = a_4 + d$$

d – difference, neboli rozdíl dvou po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti

$$a_2 - a_1 = d \quad a_{n+1} - a_n = d$$

Vzorec pro
n-tý člen

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d \quad a_4 = a_1 + 3d \quad a_5 = a_1 + 4d$$

Vzorec pro
r-tý člen

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$$

Součet n členů

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Aritmetická posloupnost

1. V aritmetické posloupnosti určete prvních 5 členů je-li dáno:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_1 = 5 ; d = 3 & [5; 8; 11; 14; 17] \\ \text{b) } a_3 = -6 ; d = 8 & [-6; 2; 10; 18; 26] \\ \text{c) } a_2 = 1,5 ; d = -0,3 & [1,5; 1,2; 0,9; 0,6; 0,3] \\ \text{d) } a_4 = 5 ; a_9 = 1,5 & [7,1; 6,4; 5,7; 5; 4,3] \\ \text{e) } a_7 = 2,2 ; a_{14} = -1,3 & [-0,8; -0,3; 0,2; 0,7; 1,2] \end{array}$$

2. Určete 10. člen v AP je-li dáno: $a_1 = -20$, $a_{20} = -67,5$

$$[-42,5]$$

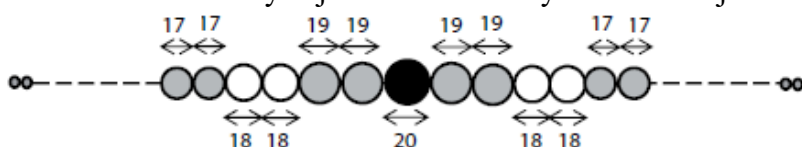
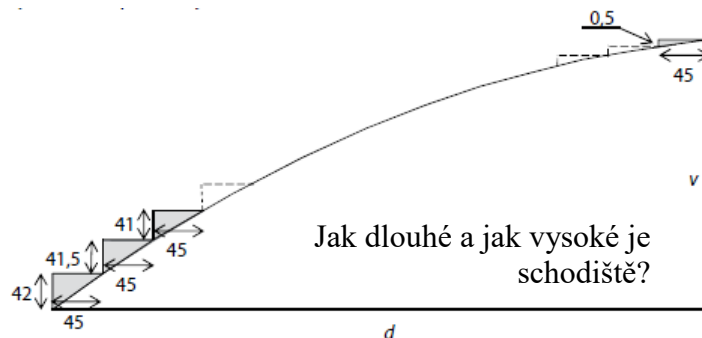
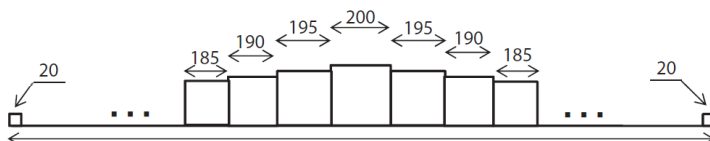
3. V aritmetické posloupnosti je dáno:

$$\text{a) } a_{12} = 10, d = -2 \quad \text{určete první 4 členy} \quad [32, 30, 28, 26]$$

$$\text{b) } a_{18} = 4, d = -\frac{1}{5} \quad \text{určete } a_8, a_{33} \quad [a_{33} = 1 \quad a_8 = 6]$$

$$\text{c) } a_{14} = 3, a_{23} = 21 \quad \text{určete } S_{15}. \quad [S_{15} = -135]$$

4. V aritmetické posloupnosti je : $a_1 = 6$, $S_{10} = 195$. Určete a_{10} , d , a_{31} [$a_{10} = 33$, $d = 3$, $a_{31} = 96$]
5. V aritmetické posloupnosti je : $a_1 = 6$, $S_{10} = 195$. Určete a_{10} , d , a_{31} [$a_{10} = 33$, $d = 3$, $a_{31} = 96$]
6. Vypočítejte součet členů aritmetické posloupnosti, když je dáno:
- a) $a_4 = 2,9$; $a_{10} = 7,1$; $S_{15} = ?$ [85,5] b) $a_3 = 29$; $a_{11} = 49$; $S_5 = ?$ [145]
- c) $a_1 = -14$; $a_6 = -15$; $S_{10} = ?$ [-149] d) $a_6 = -20$; $a_{16} = -60$; $S_{20} = ?$ [-760]
7. Vypočítejte S_8 , když je dáno:
- a) $a_8 = 5,4$ $a_4 = 2,6$ (23,6) b) $a_7 = -100$ $a_9 = -130$ (-500)
8. Vypočítejte a) S_{10} , když je dáno: $a_3 + a_6 = 6$ $a_5 + a_7 = 0$ [$S_{10} = 10$]
 b) S_5 , když je dáno: $a_1 + a_5 = 30$ $a_3 + a_4 = 36$ [$S_5 = 75$]
9. Kolik členů má posloupnost pro kterou je dáno:
- a) $S_n = 28$ $a_2 = 2$ $a_5 = 32$ [$n = 4$]
 b) $S_n = 39,2$ $a_3 = 4,5$ $a_8 = 10$ [$n = 7$]
 c) $S_n = 0$ $a_8 = 0$ $a_{10} = 1$ [$n = 15$]
10. V AP platí: $d = -12$, $a_n = 15$ Určete, kolik prvních členů má součet 456. [$n = 8$]
11. Vypočítejte součet všech členů konečné aritmetické posloupnosti: $\frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \dots; 3\frac{2}{3}$. [$n = 19$, $S_{19} = \frac{247}{6}$]
12. Kolik prvních členů AP dává součet
- a) 250, je-li $a_3 = 5$, $d = 1$? [$n = 20$]
 b) 87, je-li $a_5 = 22$, $a_6 = 27$ [$n = 6$]
 c) 130, je-li $a_1 = 4$, $d = 2$ [$n = 10$]
13. Mezi čísla 7 a 51 vložte tolik čísel, aby vznikla AP. Součet daných a vložených čísel je 348. Určete vložená čísla. [$a_1 = 7$, $d = 4$, vložená čísla: 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47]
14. V devítičlenné aritmetické posloupnosti je prostřední člen 25 a součet dvou posledních je 85. Určete součet všech členů posloupnosti. [225]
15. Vypočítejte součet všech sudých dvouciferných čísel. [2430]
16. Vypočítejte součet všech lichých trojciferných čísel. [247 500]
17. Zeď je sestavena z krychlí. Uprostřed je největší krychle s hranou délky 200 cm. Vpravo i vlevo od ní se souměrně přidávají další krychle, jejichž hrany se postupně zkracují o 5 cm. Zeď má na obou koncích nejmenší krychle s hranou délky 20 cm. Jak dlouhá je zeď v metrech?



Geometrická posloupnost

a_n – n-tý člen posloupnosti

a_1 – první člen posloupnosti

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

$$a_5 = a_4 \cdot q$$

q – kvocient, neboli podíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti

$$a_2 : a_1 = q$$

$$a_{n+1} : a_n = q$$

Vzorec pro n-tý člen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

Vzorec pro r-tý člen

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Součet n členů

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

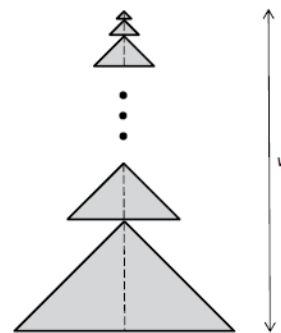
Geometrická posloupnost

- V GP je dáno: $a_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{8}$. Určete n , S_n . [$n = 8$, $S_8 = 31\frac{7}{8}$]
- $a_2 = 0,3$ $a_4 = 0,108$ Vypočítejte S_5 [$S_5 = 1,1528$]
- $a_2 = 1,2$ $a_5 = 0,0096$ Vypočítejte S_3 [$S_3 = 7,44$]
- $a_1 = -10$ $a_4 = 80$ Vypočítejte S_4 [$S_4 = 50$]
- Zjisti a_1 a q pokud platí: $2a_1 - a_3 = 20$ $2a_2 - a_4 = -40$ [$a_1 = -10$ $q = -2$]
- $a_1 = 1$ $a_4 = 0,125$ Kolik členů dává součet $S_n = 1,75$ [$n = 3$]
- $a_3 = 4,5$ $a_6 = 121,5$ Kolik členů dává součet $S_n = 20$ [$n = 4$]
- $a_2 = 110$ $a_4 = 13310$ Kolik členů dává součet $S_n = 120$ [$n = 2$]
- V GP platí :
 - $a_1 + a_2 + a_3 = 35$ $a_4 + a_5 + a_6 = 280$ Urči a_1 , q . [$a_1 = 5$, $q = 2$]
 - $a_2 - a_4 = 60$ $a_1 - a_3 = 15$ Určete prvních 5 členů. [$q = 4$, $a_1 = -1$, -4 , -16 , $-64 \dots$]
 - $a_3 - a_1 + 16 = 0$ $a_4 - a_2 + 48 = 0$ Vypočti S_3 . [$a_1 = -2$, $q = 3$, $S_3 = -26$]

postup řešení: každý člen vyjádříme pomocí 1. členu a kvocientu q , řešíme pak soustavu rovnic o dvou neznámých
- Mezi čísla $\frac{2}{3}$ a 162 vložte 4 čísla tak, aby s danými tvořila po sobě jdoucí členy GP. [2, 6, 18, 54]
- První člen šestičlenné GP je 5, poslední 160. Vypočítejte součet členů GP. [315]
- V GP je dáno: a) $a_5 = 0,27$, $q = -\frac{1}{3}$, určete a_8 . [$a_8 = -0,01$]
 - $a_4 = -16$, $a_5 = 32$, určete prvních 5 členů [2, -4, 8, -16, 32]
 - $a_1 = 6$, $q = 0,25$, určete S_4 . [$S_4 = \frac{255}{32}$]
 - $a_1 = 9$, $q = 0,1$, určete a_8 , S_5 . [$a_8 = 9 \cdot 10^{-7}$, $S_5 = 9,9999$]
 - $a_2 = -12$, $a_5 = 96$, určete q , a_8 , S_6 . [$q = 2$, $a_8 = -768$, $S_6 = 378$]

13. GP tvoří 5 čísel předposlední člen je 5 a prostřední 10. Vypočítejte součet prvních tří členů. [70]

14. Obrazec je sestaven z podobných rovnoramenných trojúhelníků. Sousední trojúhelníky mají vždy jeden společný bod a jejich výšky na základnu leží na téže přímce. Nejmenší trojúhelník má délku základny 2 cm a velikost výšky na základnu 1 cm. Každý další trojúhelník má uvedené rozměry dvakrát větší než předchozí trojúhelník.



Složené úrokování	Na počátku úrokovacího období máme hodnotu a_0. Hodnota vzroste (nebo klesne) na konci úrokovacího období o úrok p %. Na konci úrokovacího období dostaneme hodnotu a_n. n – počet úrokovacích období. Úrokovacím obdobím může být rok, čtvrtletí, měsíc, ...	
Vzrůst hodnoty	$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$	$a_n = a_0 \cdot (1 + 0,01 \cdot p)^n$
Pokles hodnoty	$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$	$a_n = a_0 \cdot (1 - 0,01 \cdot p)^n$
Daň z úroků	Při vyplácení úroků je z konečné sumy odečtena daň. Proto musíme před dosazením do vzorce snížit úrok p % o příslušnou část. Daň z úroků d %. Výsledný úrok $p' = p \cdot \frac{100-d}{100} = p - \frac{p \cdot d}{100}$	

Užití GP, složené úrokování

- Počet obyvatel města vzrostl za 12 let ze 75 000 na 94 800. O kolik % se průměrně zvyšoval za jeden rok?
- Původní cena stroje byla 800 000 Kč. Jakou cenu má stroj po 20 letech při 10% amortizaci? [97 262 Kč]
- Na účtu s 6% úrokem máme uloženo 10 000 Kč. Na účet již nebudeme nic ukládat ani vybírat.
 - Kolik Kč bude na účtu za 5 let? [13 382Kč]
 - Za kolik let se částka 10000 Kč zdvojnásobí? [asi 12 let]
 - Na kolik % by se musel vklad uložit, aby se zdvojnásobil za 5 let? [p = 14,87 %]
- Délky hran kváдру tvoří po sobě jdoucí členy geom. posloupnosti. Nejkratší hrana měří 2 cm. Objem kváдру je jeden litr. Zjistí délku ostatních hran. [2, 10, 50]
- Na VŠ se hlásí 1920 uchazečů. Příjímací řízení se koná v několika kolech tak, že do dalšího kola postupuje vždy polovina uchazečů. Kolik musí škola uskutečnit kol, aby přijala pouze 30 uchazečů? [6]
- Za kolik hodin se bakterie množící se dělením rozmnožily z 5 000 na 1 280 000. Počet bakterií se zdvojnásobí za hodinu. [8]
- Ve vesnici se za dva roky zvýšil počet obyvatel ze 100 na 121. Jaký byl průměrný procentuální roční přírůstek? [10 %]
- Roční úrok je 4 %. Úrokovací období jsou 3 měsíce. Za kolik let se nám vklad zdvojnásobí? [20,5 let]
- Plat se zvýšil z 10 000 Kč na 13 400 za 6 let. Jaký byl roční % nárůst? [10 %]
- Za kolik let se Janovi zvýšil vklad z 250 000 Kč na 388 000 Kč, když roční úrok byl 3,5 % a zúročování období bylo 1 rok? (Daň z úroku je 15 %) [15 let]
- Za kolik let vzrostla cena tuny obilí z 3 000 Kč na 5 125 Kč, když bereme roční nárůst 5,5 %? [10 let]
- Jaký byl roční úrok v bance, když za 3 roky jsme uspořili ze 50 000 Kč na 56 650 Kč? [5 %]