

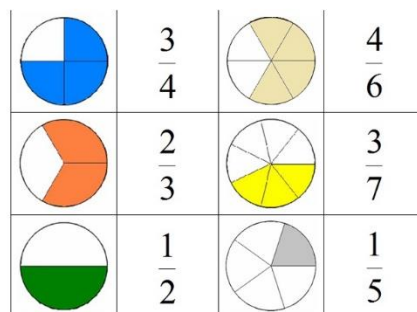


MATEMATIKA

— 1. díl – maturitní obory

– množiny
– číselné obory
– aritmetika

– výrazy
– rovnice, nerovnice
– kvadratické rovnice



Č Í S E L N É M N O Ž I N Y

R e á l n á č í s l a - R

Iracionální čísla

$$\sqrt{2} \quad -\sqrt{3}$$

$$\pi$$

R a c i o n á l n í č í s l a - Q

$$-\frac{5}{3}; -2,99$$

C e l á č í s l a - Z

Záporná čísla

... -4, -3, -2, -1

Nula

0

Přirozená čísla - N

1, 2, 3, 4, 5, ...

MATEMATICKÉ SYMBOLY A ZNAČKY

Závorky — (kulaté); [hranaté]; <úhlové>; {složené}

= je rovno, rovná se

$a \in Z$

a je prvkem množiny Z ; a leží v Z

$\neq$ není rovno, nerovná se

$a \notin N$

a není prvkem množiny N ; a neleží v N

< je menší než

$A = B$

množina A je rovna množině B

> je větší než

Z'

doplnek množiny Z

$\leq$ je menší nebo rovno

$\emptyset$

prázdná množina

$\geq$ je větší nebo rovno

$A \subset B$

A je podmnožinou B

$p \wedge q$ platí p a zároveň q

$A \cap B$

průnik množin A a B

$p \vee q$ platí p nebo q

$A \cup B$

sjednocení množin A a B

$|a|$ absolutní hodnota čísla a

$A \setminus B$

rozdíl množin $A - B$

$\in$ leží na (v)

$|\angle KLM|$

velikost úhlu KLM

$\parallel$ rovnoběžné

$|AB|$

délka úsečky AB , vzdálenost dvou bodů AB

$\perp$ kolmé

∞

nekonečno

Výsledky cvičení jsou uvedeny za příklady v závorkách. [] { } ()

K ČEMU JE VLASTNĚ DOBRÁ MATEMATIKA?

Tak tuhle otázku si snad musel položit každý, kdo chodil do školy. Proč se lidé učí základy počítání je pochopitelně zřejmé, ale mnohému do hlavy nejde, proč se musíme učit ty nesmysly, které na první pohled nemají hlavu, natož patu, a které mají mnohdy víc písmen a znaků, než samotných a klasických číslic???! Tyhle příklady se neučíme proto, abychom je někdy v životě řešili. Tyto příklady se nám s největší pravděpodobností hodit nebudou. Ale bude se nám hodit logické a jiné myšlení, které si výpočtem (někdy až šílených nesmyslů) vytváříme. Také postupy, které si při zdolávání číselných úskalí vytváříme, naleznou v našem dalším životě a jeho nástrahách své místo. A jelikož počítače řídí většinu procesů v dnešním světě, je ona Matematika neustále přítomna při každé téměř každé lidské činnosti. Na matematice je též fascinující její provázanost s reálným světem. Asi vám to tak nepřipadá, a říkáte si: "Na co mi budou vzorečky, které se učím ve škole? Vždyť to přece k ničemu není." To je omyl. Vezměme si například obyčejné výpočty ploch, bez nichž si nelze představit třeba obchod s pozemky. Vezměme si například stavbu mostů, budov, konstrukci auta, letadla, ani ten váš telefon bez matiky nefunguje a i video v mobilu je zapsáno pomocí číslic! Z toho je tedy vidět, že bez matematiky se v dnešním světě nic nepohne.

- ☒ Trénuje abstraktní myšlení a logické uvažování.
- ☒ Určitá matematická zručnost se také dává do souvislosti s tím, čemu se říká finanční gramotnost. Tenhle svět se točí kolem peněz.
- ☒ Jedním z důvodů, proč lidé věří bludům a nesmyslům, je to, že se nenaučili matematiku. A nenaučili se logicky uvažovat.
- ☒ Školská matematika je způsob, jak v tom nejdůležitějším věku trénovat mozek.

ČÍSLICE, ČÍSLA, SYMBOLY, MNOŽINY

ARABSKÉ ČÍSLICE

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘÍMSKÉ ČÍSLICE

I V X L C D M

I – 1 V – 5 X – 10 L – 50 C – 100 D – 500 M – 1000

Ke zkrácení zápisu dlouhých čísel se používá pravidla pro odečítání, ale teprve ve středověku se toto pravidlo stalo obecně používaným. Pravidlo pro odečítání umožňuje použití šesti složených symbolů, ve kterých menší číslice předchází větší.

IV = 4

IX = 9

XL = 40

XC = 90

CD = 400

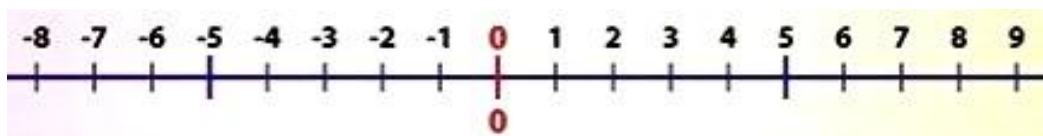
CM = 900

MCMLXXXVIII – 1988

Jeden tisíc je M, devět set je CM, osmdesát je LXXX, a osm je VIII.

Nula (z latiny nullus – žádný) je číslo 0, jedna z nejzákladnějších matematických konstant. Má tu vlastnost, že pro každé číslo a platí: $a + 0 = a$ $a \cdot 0 = 0$

Číslo 0 na číselné ose odděluje záporná čísla od kladných.



Násobky a díly jednotek

Název	Značka	Znamená násobek
peta	P	1 000 000 000 000 000 10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000 10^{12}
giga	G	1 000 000 000 10^9
mega	M	1 000 000 10^6
kilo	k	1 000 10^3
hekto	h	100 10^2
deka	dk	10 10^1
deci	d	0,1 10^{-1}
centi	c	0,01 10^{-2}
mili	m	0,001 10^{-3}
mikro	μ	0,000 001 10^{-6}

Přirozená a celá čísla

Složené číslo	má alespoň tři různé dělitele. Každé složené číslo lze rozložit na součin prvočísel. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$																					
Prvočíslo	má jen dva dělitele, 1 a samo sebe. $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29 \dots\}$																					
Aritmetické operace	Mezi základní operace s čísly, tzv. aritmetické operace (početní operace), řadíme sčítání, odčítání, násobení, dělení a mocnění.																					
Sčítání	je jednou ze základních operací v aritmetice. V nejjednodušším tvaru sčítání kombinuje dvě čísla, sčítance, do jednoho čísla, nazývaného součet. Sčítání má následující vlastnosti: <i>komutativnost</i> $a + b = b + a$ <i>asociativnost</i> $a + (b + c) = (a + b) + c$																					
Odčítání	Zápis odčítání se skládá ze tří částí: $a - b$ a – se nazývá menšenec (číslo, od kterého je odečítáno) b – se nazývá menšitel (číslo, které je odečítáno) Výsledek odčítání se pak nazývá rozdíl. Aby bylo možné odečíst libovolná dvě čísla, musí ke každému číslu a existovat opačné číslo $-a$																					
Násobení	Násobení přirozených čísel představuje jejich opakované sčítání. $\underbrace{b + b + \dots + b}_a = \sum_{i=1}^a b = a \cdot b$ a a b se nazývají činitelé . Výsledek, „ a krát b “, se nazývá součin .	Násobení má následující vlastnosti: <i>komutativnost</i> $a \cdot b = b \cdot a$ <i>asociativnost</i> $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ <i>distributivnost</i> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$																				
Dělení	je v aritmetice operace mezi dvěma čísly, která je opačná (někdy se také používá termín inverzní) k operaci násobení. Převrácené číslo – k číslu a je převrácené číslo $\frac{1}{a}$ k číslu $\frac{a}{b}$ je převrácené číslo $\frac{b}{a}$ Dělení je pak definováno jako násobení převráceným číslem.																					
Kritéria dělitelnosti	<table><tr><td>0</td><td>dělení nulou není definováno</td><td>5</td><td>je-li na místě jednotek 5 nebo 0</td></tr><tr><td>1</td><td>všechna celá čísla jsou dělitelná 1</td><td>6</td><td>je-li číslo dělitelné 2 a 3 (viz výše)</td></tr><tr><td>2</td><td>je-li na místě jednotek sudé číslo</td><td>8</td><td>je-li poslední trojčíslí dělitelné 8</td></tr><tr><td>3</td><td>je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 3</td><td>9</td><td>je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 9</td></tr><tr><td>4</td><td>je-li poslední dvojčíslí dělitelné 4</td><td>10</td><td>je-li na místě jednotek 0</td></tr></table>	0	dělení nulou není definováno	5	je-li na místě jednotek 5 nebo 0	1	všechna celá čísla jsou dělitelná 1	6	je-li číslo dělitelné 2 a 3 (viz výše)	2	je-li na místě jednotek sudé číslo	8	je-li poslední trojčíslí dělitelné 8	3	je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 3	9	je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 9	4	je-li poslední dvojčíslí dělitelné 4	10	je-li na místě jednotek 0	
0	dělení nulou není definováno	5	je-li na místě jednotek 5 nebo 0																			
1	všechna celá čísla jsou dělitelná 1	6	je-li číslo dělitelné 2 a 3 (viz výše)																			
2	je-li na místě jednotek sudé číslo	8	je-li poslední trojčíslí dělitelné 8																			
3	je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 3	9	je-li <u>ciferný součet</u> dělitelný 9																			
4	je-li poslední dvojčíslí dělitelné 4	10	je-li na místě jednotek 0																			

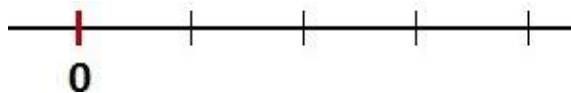
Racionální čísla

Operace se zlomky	Racionální číslo je číslo, které lze vyjádřit jako <u>zlomek</u>, tj. <u>podíl dvou celých čísel</u>, většinou zapsaný ve tvaru $a : b$ nebo $\frac{a}{b}$, kde b není <u>nula</u>. Název pochází z latinského <i>ratio</i> – podíl. Každý zápis zlomku je založen na části celku (například polovina $\frac{1}{2}$, tři čtvrtiny $\frac{3}{4}$, dvě třetiny $\frac{2}{3}$). Zlomek se zapisuje ve tvaru $\frac{a}{b}$. Výraz a se nazývá čitatel (nad zlomkovou čarou) a výraz b se nazývá jmenovatel (pod zlomkovou čarou). Aby měl zlomek smysl, nesmí být jmenovatel nula (v oboru reálných čísel nelze nulou dělit). Pokud je jmenovatel větší než čitatel (zlomek je menší než jedna) označuje se tento zlomek jako pravý zlomek. Celá čísla a zlomky lze kombinovat. Zlomky lze převést do smíšeného tvaru, pokud je čitatel větší než jmenovatel (např. $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$). Zlomky se dají sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat. Při sčítání a odčítání převádíme zlomky na stejného jmenovatele. Násobíme tak, že vynásobíme mezi sebou oba čitatele a oba jmenovatele. Dělení převedeme na násobení převráceným číslem. Pokud se v čitateli i ve jmenovateli zlomku opět nachází zlomek, jedná se o složený zlomek.				
	sčítání zlomků	násobení zlomků	dělení zlomků	složený zlomek	krácení zlomků
	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot r}{c \cdot s} = \frac{r}{s}$

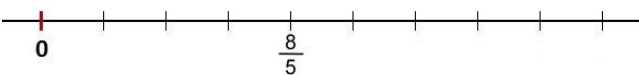
1. Vypočítejte hodnoty výrazů bez použití kalkulatoru:

- | | | | |
|---|---------|---|---------|
| a) $-0,7 \cdot 5 - 0,1 \cdot (20 - 25) =$ | $[-3]$ | b) $(-8 - 2) : 0,5 - [1 - 2 \cdot (-3)] =$ | $[-27]$ |
| c) $3 \cdot (-13) + 2,4 : 0,06 =$ | $[1]$ | d) $-3 - 2 - (0,24 - 0,8 \cdot 0,3) \cdot 15 =$ | $[-5]$ |
| e) $-8,1 : (-0,09) - 2 \cdot [1 - (125 - 5,5) : (-10)] =$ | $[68]$ | | |
| f) $0,1 - 10 \cdot [(-0,9) \cdot 1,1 + (-4 - 2) \cdot (-0,1)] =$ | $[4]$ | | |
| g) $(-0,04) : (-0,5) - 0,1 \cdot [(-8) \cdot (-0,1) + (-1 - 1) : 0,01] =$ | $[20]$ | | |
| h) $10 - 0,01 \cdot [(-50 - 50) \cdot 0,1 + (-101 + 1) : (-0,1)] =$ | $[0,1]$ | | |
| i) $1 + [8 - 3 \cdot (4 : 0,8 - 6 \cdot 0,5)] =$ | $[3]$ | | |

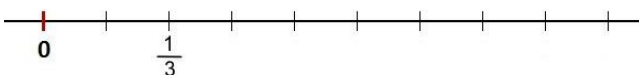
2. Nepleťte si „krátit“ a „násobit“. Číslo $\frac{9}{12}$ nejprve zkrátte třemi a výsledek zapište ve tvaru desetinného čísla. Pak číslo $\frac{9}{12}$ vynásobte třemi a výsledek zapište ve tvaru desetinného čísla. Pak tyto dva výsledky znázorněte na číselné ose. Jaká je vzdálenost těchto čísel na ose?



3. Vyznačte v obrázku na číselné ose číslo 1 a 0,4



4. Vyznačte v obrázku na číselné ose číslo $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{12}{12}$



5. Vypočítejte a výsledek uveďte v základním tvaru, případně převedte na smíšené číslo:

a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right) : \left(\frac{8}{3} - \frac{7}{2}\right) =$

b) $1 - \frac{2}{5} : 0,3 =$

c) $\left(1 - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{4} =$

d) $\left(\frac{1}{4} + \frac{11}{12}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right) =$

e) $\frac{4}{3} \cdot \left(2 + 1\frac{1}{2} - 0,75\right) =$

f) $\left(\frac{3}{9} - 2\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{18}{22}\right) =$

$\left[a) - 1 b) - \frac{1}{3} c) \frac{4}{5} d) - 1 e) 3\frac{2}{3} f) 1\frac{1}{2}\right]$

6. Vypočítejte a výsledek uveďte v základním tvaru, případně převedte na smíšené číslo:

a) $\frac{14}{8} : \left(6 - \frac{3}{4}\right) =$

b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}\right) =$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} : \left(1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}\right) =$

d) $\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{6} - 1\frac{1}{3} + 1\right) =$

e) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} =$

f) $\left(\frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{2}\right) : 1\frac{1}{4} =$

g) $\left[\left(\frac{3}{8} - 2\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{5} + 1\right] : \frac{3}{8} =$ $\left[a) \frac{1}{3} b) \frac{1}{2} c) - \frac{5}{6} d) 1\frac{2}{7} e) 2\frac{19}{36} f) 1 g) - \frac{1}{5}\right]$

7. Vypočítejte a výsledek uveďte v základním tvaru, případně převedte na smíšené číslo:

a) $\frac{1 - \frac{2}{3}}{3 \cdot 1\frac{1}{3}} =$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

b) $\frac{0,5 - 2\frac{1}{3}}{3,3 : 1\frac{1}{2}} =$ $\left[-\frac{5}{6}\right]$

c) $\frac{0,4 \cdot \frac{4}{6}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{10}} =$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

d) $\frac{2 - \frac{7}{4}}{4 \cdot 2\frac{1}{4}} =$ $\left[\frac{1}{36}\right]$

e) $\frac{\left(5\frac{2}{9} - 4\frac{5}{6}\right) : 2\frac{1}{3}}{3\frac{5}{6} - 3\frac{2}{3}} =$ $[1]$

f) $\frac{\left(0,9 - 1\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{4}{5} + 0,1\right)}{2\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} =$ $\left[-\frac{14}{39}\right]$

8. V kantýně se na obědy platí zálohy. Každý strávnick zaplatil jinou částku. Obědy jsou každý den za jednotnou cenu. Na konci měsíce probíhá vyúčtování. Vedoucí si částky zapisuje do tabulky. Některé údaje byly nečitelné. Je na vás, abyste je doplnili.

Jméno strávnicka	Počet odebraných obědů	Záloha	Doplatek	Zbývá vrátit
Karel Práskal		400,-	48,-	0,-
Helena Modrá	11			48,-
Hedvika Borovská	10		20,-	
Jiří Smetana	15	500,-	0,-	20,-
Jaroslav Mlíko	20	1.000,-		

9. Hodnotitelé testů jsou schopni opravit jeden test za 12 minut. Jeden hodnotitel může opravovat testy max. 4 hodiny denně, dostane za jeden den hrubou mzdu 650 Kč. V rámci celokrajského testování žáků 9. tříd bylo nutno opravit 10 000 testů za 4 dny.

I. Kolik bylo zapotřebí hodnotitelů, aby byly testy opraveny včas? [125]

II. Jaká byla čistá mzda hodnotitelů pokud jim byla odečtena 15% daň? [2 210]

III. Jaké byly finanční náklady na opravování testů? [325 000]

Poměr

1. Zvětšíte číslo 60 v poměru 8:3 {160}
2. Zmenšíte číslo 96 v poměru 5:6 {80}
3. Dva stroje mají výkonnost v poměru 6:7. Dohromady vyrobí za hodinu 325 součástek. Kolik vyrobí první stroj za hodinu, kolik vyrobí druhý? {150 a 175}
4. Jana a Petr společně nasbírali 57 kg jahod. Petr byl dvakrát výkonnější než Jana. Kolik nasbíral? {38kg}
5. Otec a syn mají výšku v poměru 7:6. Otec měří 189 cm. Kolik měří syn? {162 cm}
6. V omáčce je smetana a žloutky v poměru 3:1. Smetany je v omáčce 126 g, kolik g žloutků je v omáčce? {42g}
7. V těstě je mouka a tuk v poměru 3:2. Pokud máme 1,5 kg mouky, kolik potřebujeme tuku? {1 kg}
8. Dvě vesnice vzdálené 7,5 km, jsou na mapě vzdáleny 15 cm. Jaké je měřítko mapy? {1:50 000}
9. Jak jsou na mapě s měřítkem 1:2500000 vzdálena dvě místa, ve skutečnosti vzdálená 150 km? {6 cm}
10. Plán s měřítkem 1:500 znázorňuje dva domy 7 cm od sebe. Kolik je to metrů ve skutečnosti? {35 m}

Trojčlenka

1. Na 15 porcí guláše potřebujeme 2,5 kg masa. Kolik kg masa musíme mít na 100 porcí? {16,7 kg}
2. Čtyři kuchaři uvařili slavnostní oběd za 2 hodiny. Jak dlouho by jim to trvalo, kdyby byli pouze tři a pracovali stejným tempem? {2 hod 40 min}
3. V pěti pecích stihneme upéct koláče za 2 hodiny. Jak dlouho bude trvat upečení stejného množství, pokud máme k dispozici jen 4 pece? {2 hod 30 min}
4. Osm zedníků stihne omítnout dům za 30 hodin. Kolik zedníků je třeba na omítnutí za 24 hodin? {10}
5. Na 20 porcí španělského ptáčka potřebujeme 4 kg masa. Kolik kg masa musíme koupit na 75 porcí? {15kg}
7. Čtyři kamarádi stihli očesat strom jablek za 45 minut. Jak dlouho by jim to trvalo, kdyby byli pouze tři? {1h}
8. 6 strojů za den naplní 2400 lahví. Kolik strojů budeme potřebovat, chceme-li za den naplnit 8000 lahví? {20}
9. 5 strojů na výrobu tyčinek zvládne upéct 100 kg tyčinek za 3 hodiny. Za jakou dobu stejné množství tyčinek upeče 6 strojů? {2,5 hod}
10. Jeden stroj na balení čokolád zvládne za hodinu zabalit 1 000 čokolád. Kolik čokolád zvládnout zabalit 3 stroje za minutu? {20}
11. Odvoz brambor třemi nákladními vozy trval 6 hodin. Jak dlouho by trvalo odvezení stejného množství brambor se dvěma vozy? {9}

Procenta

z – základ (100%), p – počet procent, $\check{c}$ – procentová část

1% z čísla a je 0,01. a

$$\check{c} = \frac{z}{100} \cdot p$$

$$p = \frac{100\check{c}}{z}$$

$$z = \frac{100\check{c}}{p}$$

100 = %

Procento se často nahrazuje desetinným číslem či zlomkem.

Per cento – na sto. Je možné používat místo 22 % výraz 0,22 nebo 130 % výraz 1,3

Vzorce se pak zjednoduší → $\check{c} = p \cdot z$

$$p = \frac{\check{c}}{z}$$

$$z = \frac{\check{c}}{p}$$

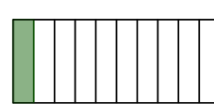
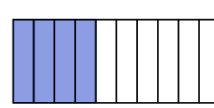
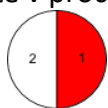
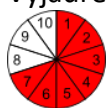
Promile

1‰ z čísla a je 0,001. a

10‰ = 1%

1 000‰ = základ = 100%

Vyjádřete v procentech jaká část kruhu či obdélníku je vyznačena:



1. Pavel na brigádě odpracoval sedm desetin plánované doby. Kolik procent doby mu ještě zbývá? {30%}
2. Jana čte knihu a přečetla již dvě pětiny knihy. Kolik % jí zbývá přečíst? {60%}
3. Eva napsala již tři osminy plánovaného rozsahu seminární práce. Kolik procent práce jí zbývá napsat? {62,5%}
4. Petr měl rok na svém kontě uloženo 12 000 Kč. Roční úrok byl 1,5%. Kolik měl po připsání úroků na knížce za rok? {12 180 Kč}

5. Termínovaný vklad je úročen 2,5%. Jaký bude úrok za rok, jestliže uložíme 120 000 Kč? {3 000 Kč}
6. Koupili jsme 7 kg masa. Připravili jsme 35 porcí po 150 g. Kolik % hmotnosti masa se ztratilo vařením? {25%}
7. Máme 8,5 kg syrového masa, vařením ztrácí maso 25% své hmotnosti. Kolik 150 gramových porcí připravíme z tohoto množství po uvaření? {42}
8. Boty stály původně 1800 Kč, pak byly zlevněny o 22%. Kolik stály po zlevnění? {1 404 Kč}
9. Do školy chodí 520 žáků, z toho je 55% dívek. Kolik chodí do školy dívek a kolik chlapců? {d=286, ch=234}
10. Máme 12 kg syrového masa, vařením ztrácí maso 25% své hmotnosti. Kolik 200 gramových porcí připravíme z tohoto množství po uvaření? {45}
11. Plynová trouba byla zdražena ze 9 812 Kč na 10 499 Kč. O kolik % byla zdražena? {7%}
12. Hrubá mzda činila 22 550 Kč. Sociální a zdravotní pojištění činí 12,5 %. Kolik odvedl pracovník na sociálním a zdravotním pojištění? {2 819 Kč}
13. Koupili jsme 3 kg kuřecího masa, uvařili jsme z něj 22 porcí po 120 g. Kolik % masa se ztratilo vařením? {12%}
14. Na půl kila rybí pomazánky jsme spotřebovali 300 g sardinek, 50 g taveného sýru, 70 g cibule a zbytek tvoří okurky. Vypočítejte kolik % sardinek, sýru, cibule a okurek tvoří pomazánku. {60%, 10%, 14%, 16%}
15. Ve škole mělo 24 žáků vyznamenání, což je 8% celkového počtu žáků. Kolik je všech žáků ve škole? {300}
16. Ve škole studuje 369 číšníků, což je 41% všech žáků školy. Kolik má škola celkem žáků? {900}
17. V New Yorku žije 14 950 000 obyvatel, což je 5% obyvatel USA. Kolik obyvatel mají USA? {299 000 000}
18. Eva vyhrála 2 800 000 Kč. Daň z výhry je 15%. Kolik Evě zůstalo po zaplacení daně? {2 380 000 Kč}
19. Tržby v obchodě byly 375 000 Kč. Norma nezaviněného manka je stanovena 0,15 % z tržeb. Kolik činí nezaviněné manko? {562,50 Kč}
20. Ve třídě mělo 6 žáků vyznamenání, což je 18,75 % celkového počtu žáků. Vypočítejte kolik žáků nemělo vyznamenání. {26}
21. K volbám v jedné obci přišlo 40 % ze všech 4 808 oprávněných voličů. Mezi voliči je 52 % žen a z nich 20 % volilo vítěznou stranu. Kolik žen z obce volilo vítěznou stranu? {200}
22. Sýr obsahuje 45 % tuku v sušině. Sušina tvoří 60 % celkové hmotnosti sýru. Kolik procent tuku obsahuje sýr? {27 %}
23. V salátu je 22,5 % majonézy. Majonéza obsahuje 80 % tuku. Kolik tuku z majonézy je obsaženo v salátu? {18 %}
24. Třetina žáků neprospěla v prvním termínu u maturity. Z toho $\frac{3}{5}$ byli chlapci. Kolik procent chlapců neprospělo v prvním termínu? {20 %}

Reálná čísla

Absolutní hodnota	Znamená vlastně hodnotu čísla bez znaménka. 0 je absolutní hodnotou jen pro 0. Geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla je vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od počátku – od nuly.		
Definice absolutní hodnoty:	Je-li $a \geq 0$, pak $ a = a$ (s nezápornými nic nedělá).	$ a \cdot b = a \cdot b $	$\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$
	Je-li $a < 0$, pak $ a = -a$ (záporným změní znaménko na plus)	pro $a \neq 0 \rightarrow a > 0$	

1. Vypočítejte hodnoty výrazů bez použití kalkulatoru:

- a) $|0,1 \cdot [5,0,06 - (2 : 0,5 - 3,0,9)]| =$ [0,1] b) $|(4,2 : 0,7 - 6 \cdot 0,05) \cdot (-10)| =$ [57]
- c) $|(-20 + 12) \cdot (-3) + 2 \cdot (-8 - 7)| \cdot 0,5 =$ [3] d) $|10 \cdot (-6)| - 2 \cdot [| -5 | \cdot (-5) + 4 \cdot | -4 |] =$ [78]
- e) $[| -3 - 6 | \cdot (-2) + 4 \cdot | -20 + 13 |] : (-10) =$ [-1] f) $(3,2 : 0,8 - 5 \cdot 0,04) \cdot | -100 | =$ [380]
- g) $| -6 \cdot (-8) + (-4) \cdot 12 | + (1 - 8 \cdot 0,05) =$ [0,6] h) $|10 \cdot (-6) - 2 \cdot [-5 \cdot (-8) + 4 \cdot (-4)]| =$ [108]
- i) $|7 - 2| + |14 - 7| - |2| + | -7 | + |6 - 8| =$ [19] j) $|| -7 | - | -10 || - |5| - |1| + 3 \cdot | -4 | =$ [9]
- k) $\left| 0,8 - \frac{7}{4} - \frac{1}{20} \right| : \frac{15}{120} =$ [8] l) $\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{15} \right) : \left| -3 - \frac{2}{5} \right| =$ $\left[\frac{1}{9} \right]$

2. Dosazujte do výrazu za y a vypočítejte: $\frac{|y-8|}{|y|+3} =$ a) $y = -2$ a) $y = 2$ a) $y = -1$ a) $y = -12$

3. Výsledek číselného výrazu zaokrouhlete na desítky:

a) $10^3 \cdot (0, \overline{6} - 0, \overline{4}) =$

b) $10^5 \cdot (0, \overline{21} - 0, \overline{17}) =$

c) $(0, \overline{06} + 0, \overline{241}) \cdot 100^2 =$

4. Najděte číslo x , pro které platí: $|x - 1| = 1$

$|x + 3| = 1$

$|5 - x| = 1$

5. Najděte číslo x , pro které platí: $|2 - x| = x$

$|4 + x| = -x$

Množiny

Zápis množiny výčtem prvků: $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
množina obsahuje pět přirozených čísel.

jiné zápisy stejné množiny: $C = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 3 \wedge x < 8\}$

nebo $C = \{x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 7\}$

Příklady zápisu některých specifických množin:

$R_0^+ = \langle 0; \infty \rangle$

$R^+ = (0; \infty)$

$N^0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

$Z_0^- = \{\dots; -2; -1; 0\}$

Podmnožiny reálných čísel se zapisují pomocí intervalů.

Intervaly

uzavřený interval



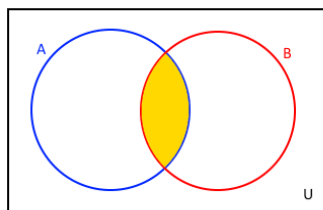
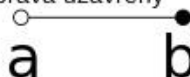
otevřený interval



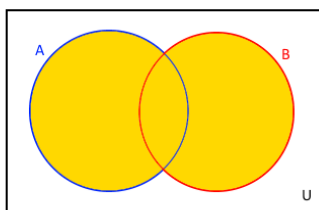
zleva uzavřený
zprava otevřený



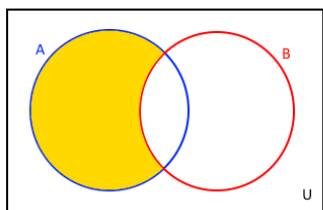
zleva otevřený
zprava uzavřený



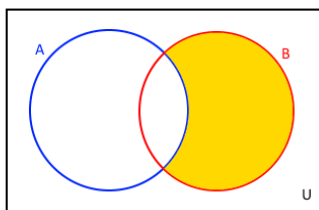
$A \cap B$ – průnik



$A \cup B$ – sjednocení



$A \setminus B$ – rozdíl množin

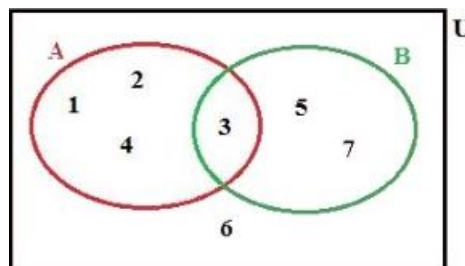


$B \setminus A$ – rozdíl množin

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$A = \{1; 2; 3; 4\}$

$B = \{3; 5; 7\}$



Sjednocení množin $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$

Průnik množin $A \cap B = \{3\}$

Rozdíl množin $A \setminus B = \{1; 2; 4\}$

Rozdíl množin $B \setminus A = \{5; 7\}$

Rozdíl množin $U \setminus B = \{1; 2; 4; 6\}$

Rozdíl množin $U \setminus (A \cup B) = \{6\}$

Zápis množiny	Zápis intervalem		Zápis množiny pro $a < b$	Zápis intervalem	
$P = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$	$x \in (a; \infty)$		$P = \{x \in \mathbb{R}; x > a \wedge x < b\}$	$x \in (a; b)$	
$P = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$	$x \in \langle a; \infty)$		$P = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a \wedge x \leq b\}$	$x \in \langle a; b\rangle$	
$P = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$	$x \in (-\infty; a)$		$P = \{x \in \mathbb{R}; x > a \wedge x \leq b\}$	$x \in (a; b]$	
$P = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$	$x \in (-\infty; a\rangle$		$P = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a \wedge x < b\}$	$x \in \langle a; b)$	

1. Zapište množinu A výčtem prvků.

a) $A = \{x \in \mathbb{N}; -2,3 \leq x < 3,5\}$

$\{1,2,3\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z}; -2,3 \leq x < 3\}$

$\{-2,-1,0,1,2\}$

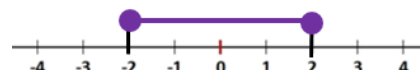
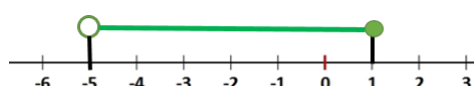
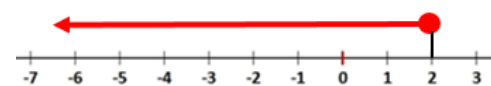
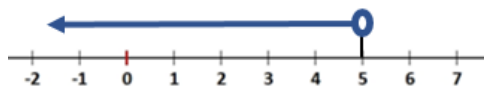
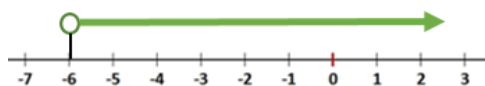
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}^+; -3 \leq x < 3\}$

$\{1,2\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{Z}; -2 < x \leq 3\}$

$\{-1,0,1,2,3\}$

2. Zapište množiny z obrázku intervalem



3. Zapište jako intervaly:

a) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq -6\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; -4 < x \leq 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$

$\{a\}(-6; \infty)$ b) $(-4; 7)$ c) $\langle -1; 1 \rangle$ d) $(-\infty; 0]$

4. Zakreslete dané množiny na číselné osy

a) $\{x \in \mathbb{R}; x < 17\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; -20 < x < 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; -1,25 < x \leq 10\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq -25\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}; 14 \leq x < 20\}$

f) $\{x \in \mathbb{R}; 48 \geq x\}$

5. Zapište dané intervaly jako množiny. Např.: $(-2; +\infty)$ $\{x \in \mathbb{R}; x \geq -2\}$

a) $\langle -3; 0 \rangle$

b) $(-1; 3)$

c) $\langle 0; \sqrt{2} \rangle$

d) $\langle -11; 1 \rangle$

e) $\langle 0; +\infty \rangle$

f) $(0; 2)$

g) $(-\infty; 0)$

h) $(-\infty; 4)$

$\left[\begin{array}{l} a) \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < 0\} \quad b) \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3\} \quad c) \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \quad d) \{x \in \mathbb{R}; -11 \leq x \leq 1\} \\ e) \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \quad f) \{x \in \mathbb{R}^+; x < 2\} \quad g) \{x \in \mathbb{R}^- \} \quad h) \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\} \end{array} \right]$

6. Zapište jedním intervalem

a) $(-7; -1) \cup \langle -3; 3 \rangle$

b) $(-2; 5) \cap \langle 0; 8 \rangle$

c) $(-4; 2) \cap \langle 1; 7 \rangle$

d) $(-3; 4) \cup \langle 0; 8 \rangle$

e) $(-\infty; 3) \cap \langle -2; 5 \rangle$

f) $(-7; -3) \cup (-5; +\infty)$

g) $\langle -6; 2 \rangle \cap (2; 4)$

h) $(-\infty; 0) \cup \langle 0; +\infty \rangle$

$\left[\begin{array}{l} a) (-7; 3) \quad b) (0; 5) \quad c) \langle 1; 2 \rangle \quad d) (-3; 8) \quad e) \langle -2; 3 \rangle \quad f) (-7; \infty) \quad g) \emptyset \quad h) \mathbb{R} \end{array} \right]$

7. Najděte průnik a sjednocení dvou daných množin (intervalů):

a) $(-1; 3) \cap \langle 0; +\infty \rangle$

b) $(-1; 3) \cap (-2; -0,1)$

c) $(-5; 2) \cap \langle 0; \sqrt{2} \rangle$

d) $(-\infty; -10) \cap \langle -11; 1 \rangle$

e) $\langle -2; -1 \rangle \cap \langle -11; 1 \rangle$

f) $(-\infty; 0) \cap \langle 0,02; \infty \rangle$

g) $\{x \in \mathbb{R}^+; x \leq \frac{1}{2}\} \cap \langle -11; \frac{1}{4} \rangle$

h) $\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq \frac{4}{7}\} \cap \langle -2; 0,5 \rangle$

i) $(-\infty; 0) \cap \langle -2; \infty \rangle$

$\{a\} \cap = \langle 0; 3 \rangle \cup = (-1; -\infty) \quad b) \cap = (-1; -0,1) \cup = (-2; 3) \quad c) \cap = \langle 0; \sqrt{2} \rangle \cup = (-5; 2)$

$\{d\} \cap = (-11; -10) \cup = (-\infty; 1) \quad e) \cap = \langle -2; -1 \rangle \cup = \langle -11; 1 \rangle \quad f) \cap = \emptyset \cup = \mathbb{R} \setminus (0; 0,02)$

$\{g\} \cap = (0; \frac{1}{4}) \cup = (-11; \frac{1}{2}) \quad h) \cap = \langle -1; 0,5 \rangle \cup = \langle -2; \frac{4}{7} \rangle \quad i) \cap = \langle -2; 0 \rangle \cup = \mathbb{R}$

Reálná čísla – mocniny a odmocniny

Mocniny
a odmocniny
reálných čísel

a, b – základ mocniny, odmocniny

x, y – exponenty

Definice
mocniny,
odmocniny

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$$

násobíme x činitelů

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\sqrt[x]{a} = b, \text{ právě když } b^x = a$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}} = \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[x]{a})^y = \sqrt[x]{a^y}$$

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[x \cdot y]{a}$$

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{x:y} = a^{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt[2]{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$a^0 = 1$$

Číslo v exponenciálním tvaru: $X \cdot 10^n$

$(1 < X < 10 \wedge n \in \mathbb{Z})$

na kalkulačkách ve tvaru $2,4E+04$ znamená $2,4 \cdot 10^4$

$1,2E-08$ znamená $1,2 \cdot 10^{-8}$

Periodická čísla

$$0,\bar{3} = 0,333\ 333\ 333\ \dots$$

$$0,\overline{23} = 0,232\ 323\ 232\ \dots$$

$$0,2\overline{54} = 0,254\ 545\ 454\ \dots$$

$$0,\overline{125\ 647} = 0,125\ 647\ 125\ 647\ \dots$$

Iracionalní číslo nemůže být vyjádřeno zlomkem a nelze jej vyjádřit konečným způsobem v desítkové soustavě, a to ani pomocí periody.

Např.: $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ \dots$

a	a^2	a^3	a^4
1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1 296
7	49	343	2 401
8	64	512	4 096
9	81	729	6 561
10	100	1 000	10 000
11	121	1 331	14 641
12	144	1 728	20 736
13	169	2 197	28 561
14	196	2 744	38 416
15	225	3 375	50 625
20	400	8 000	160 000

Mocniny a odmocniny

1. Vypočítejte bez použití kalkulatoru:

a) $0,5^2 =$ b) $0,1^2 =$ c) $0,9^2 =$ d) $0,1^5 =$ e) $1,5^2 =$ f) $0,2^3 =$ g) $0,2^4 =$

2. Součin zapíše jako mocninu:

a) $3^2 \cdot 3^3 =$ b) $8^4 \cdot 8^3 =$ c) $12^5 \cdot 12 =$ d) $2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^3 =$ e) $1^{12} \cdot 1^3 =$ f) $7^9 \cdot 7 =$ g) $9 \cdot 9^2 =$

3. Vypočítejte bez použití kalkulatoru:

a) $\sqrt{4900} =$ $\sqrt{40000} =$ $\sqrt{810000} =$ $\sqrt{14400} =$ $\sqrt{0,36} =$ $\sqrt{0,0225} =$

b) $\sqrt{1,21} =$ $\sqrt{1,96} =$ $\sqrt{0,0001} =$ $\sqrt{0,000001} =$ $\sqrt[3]{1000} =$ $\sqrt[3]{8} =$

c) $\sqrt[3]{27} =$ $\sqrt[3]{0,001} =$ $\sqrt[5]{0,00001} =$ $\sqrt[3]{0,027} =$ $\sqrt[3]{0,008} =$ $\sqrt[3]{1000000} =$

d) $\sqrt[3]{5^6} =$ $\sqrt[4]{8^8} =$ $\sqrt[6]{12^6} =$ $\sqrt[5]{100000} =$ $\sqrt[5]{10^{10}} =$ $\sqrt[7]{1^{14}} =$

4. Vypočítejte bez použití kalkulatoru:

a) $(-2)^3 + (-3)^2 \cdot \sqrt[4]{0,0001} = [-7,1]$ $(-1)^3 - (-5)^2 \cdot \sqrt[3]{0,001} = [-3,5]$ $-50^2 - \sqrt{1,21} \cdot \sqrt[4]{10000} = [-2511]$

b) $-20^2 - \sqrt{2,25} \cdot \sqrt[6]{1000000} = [-415]$ $9^0 + 1^9 \cdot (\sqrt{0,25} - \sqrt{144}) = [-10,5]$ $8^0 + 1^5 \cdot (\sqrt{0,49} - \sqrt{196}) = [-12,3]$

c) $0,1^3 \cdot \sqrt{10^6} - (-0,5)^2 = [0,75]$ $0,1^2 \cdot \sqrt{10^4} - (-0,8)^2 = [0,36]$ $\frac{7 \cdot 5^{10} + 3 \cdot 5^{10} - 2 \cdot 5^{10}}{5^5 \cdot 5^5} = [8]$

d) $\frac{10 \cdot 4^{14} + 3 \cdot 4^{14} - 9 \cdot 4^{14}}{4^9 \cdot 4^3} = [64]$ $\frac{7 \cdot 6^{25} + 3 \cdot 6^{25} - 4 \cdot 6^{25}}{6^{13} \cdot 6^{13}} = [1]$ $\frac{2 \cdot 2^{22} + 3 \cdot 2^{22} - 4 \cdot 2^{22}}{2^9 \cdot 2^{10}} = [8]$

e) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = [-4]$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}} = [-13]$ $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt{72} \cdot \sqrt{2} = [-9]$

f) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{250} - \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}} = [1]$ $-2^4 + (-10)^4 \cdot (\sqrt[5]{0,1})^{15} = [-6]$ $9^0 + 1^9 \cdot (\sqrt{36} - 16)^4 = [401]$

g) $(-1)^3 - 5^2 \cdot (\sqrt[3]{0,1})^6 = [-1,25]$ $4^0 + 1^{19} \cdot (\sqrt{49} - 36)^4 = [170]$ $(-2)^3 - 2^3 \cdot \sqrt[6]{0,1^{18}} = [-8,008]$

5. Jsou výsledky přirozená čísla?

$\frac{-8^2}{\sqrt{16}}; \frac{(-6)^2}{-\sqrt{81}}; \left(\frac{(-4)^2}{\sqrt{36} - \sqrt{64}} \right)^2$ {ne; ne; ano}

Mocniny s celočíselným exponentem

$10^{-4} = 0,0001$	deseti tisícina	$10^2 = 100$	sto
$10^{-3} = 0,001$	tisícina	$10^3 = 1\,000$	tisíc
$10^{-2} = 0,01$	setina	$10^6 = 1\,000\,000$	milion
$10^{-1} = 0,1$	desetina	$10^9 = 1\,000\,000\,000$	miliarda
$10^0 = 1$	jedna	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	bilion
$10^1 = 10$	deset	$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$	biliarda

1. Daná čísla napište ve tvaru $N \cdot 10^n$ ($1 < N < 10 \wedge n \in \mathbb{Z}$)

$0,000\,002 = [2 \cdot 10^{-6}]$ $150\,000\,000\,000 = [1,5 \cdot 10^{11}]$ $0,000\,000\,000\,3 = [3 \cdot 10^{-10}]$

$542\,000\,000 = [5,42 \cdot 10^8]$ $0,000\,000\,000\,11 = [1,1 \cdot 10^{-10}]$ $230\,000\,000 = [2,3 \cdot 10^8]$

2. Vypočítejte bez kalkulatoru: (převeďte na tvar $N \cdot 10^n$)

$$\begin{array}{ll} 0,000\,000\,000\,24 : 6\,000\,000\,000 = [4 \cdot 10^{-20}] & 25\,000\,000\,000 \cdot 0,000\,000\,000\,4 = [10] \\ 8\,000\,000\,000 : 0,000\,000\,04 = [2 \cdot 10^{17}] & 15\,000\,000\,000 : 0,000\,000\,05 = [3 \cdot 10^{17}] \end{array}$$

3. Vypočítejte bez kalkulatoru:

$$\begin{array}{ll} 2,3 \cdot 10^{25} + 7 \cdot 10^{24} = [3 \cdot 10^{25}] & 1,2 \cdot 10^{47} \cdot 5 \cdot 10^{13} = [6 \cdot 10^{60}] \\ 15 \cdot 10^{22} + 2,1 \cdot 10^{23} - 260 \cdot 10^{21} = [10^{23}] & 4 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 10^{25} = [2 \cdot 10^6] \\ 8 \cdot 10^{-8} + 2,2 \cdot 10^{-7} = [3 \cdot 10^{-7}] & 21 \cdot 10^{-11} + 7,9 \cdot 10^{-10} = [10^{-9}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4. \text{ a) } \frac{25a^{-8} \cdot y^{-1} \cdot 4y}{50y^{-2} \cdot y^{-1}} = & \text{ b) } \frac{12x}{6x^3} + \frac{64x^{10}}{x^{-2}} - \frac{1000x^{-9}}{200x^{-7}} - \frac{x^{20}}{x^{22}} - (-2x^2)^6 = \\ \text{ c) } \left(\frac{a^{-2} \cdot b^{-3}}{c^{-1} \cdot d^{-3}} \right)^{-5} \cdot \left(\frac{a^5 \cdot d^{-4}}{b^6} \right)^{-2} = & \text{ d) } 2[(-a)^3]^2 - 5(-a)^6 - (3a^2)^3 + (-2a^3)^2 + (-5)^2 \cdot (a^2)^3 = [-a^6] \end{array}$$

5. Upravte výrazy a výsledky uveďte jako mocniny s kladnými exponenty

$$\begin{array}{ll} \text{ a) } \frac{7 \cdot 11^{-11} + 3 \cdot 11^{-11} + 11^{-11}}{11^{-2} \cdot 11^{-9}} = [11] & \text{ b) } (-0,2)^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - (0,1)^{-5} = [-100067] \\ \text{ c) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + (-0,9)^{-1} = \left[-\frac{10}{27}\right] & \text{ d) } \left(\frac{-3}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{-3}{7}\right)^{-2} - \left(-\frac{4}{9}\right)^0 = \left[-\frac{182}{27}\right] \\ \text{ e) } \frac{5^{-11} \cdot 5^{-7}}{5^0 \cdot 5^{-15}} - (-5)^{-2} = \left[-\frac{4}{125}\right] & \text{ f) } \frac{0,4^{-5} \cdot 0,4^{-2}}{0,4^{-6} \cdot 0,4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left[\frac{23}{8}\right] \\ \text{ g) } \frac{2 \cdot 2^{-2} - 2 \cdot 2^{-3}}{4^{-1} + 4^{-2}} = \left[\frac{4}{5}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 6. \text{ a) } 15 \cdot (-3)^{-3} \cdot (x-5)^0 - 3^{-2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} \left(-\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left\{\frac{80}{27}\right\} \\ \text{ b) } \frac{5 \cdot 2^{-2} - 2 \cdot 5^{-2}}{5^{-2} + 2^{-2}} : \left(\frac{2^{-1} + 5^{-1}}{5^{-1} - 2^{-2}}\right)^{-1} = \left\{-\frac{1638}{29}\right\} \\ \text{ c) } (0,4)^{-2} \cdot 5^{-4} \cdot (-0,1)^{-4} + 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^0 + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = \{92,5\} \end{array}$$

7. Dokažte, že platí $\frac{5^{-1} + 3^{-1}}{15^{-1} + (-7)^{-1}} = \frac{5^{-1} \cdot 3^{-1}}{15^{-1} \cdot (-7)^{-1}}$

$$8. \text{ a) } \frac{6^5 \cdot 8^{-6}}{5^{-5} \cdot 15^5 \cdot 4^{-7}} = [2] \quad \text{ b) } \frac{21^3 \cdot 4^4}{6^5 \cdot 14^3} = \left[\frac{1}{9}\right]$$

$$9. \text{ a) } \frac{12^4 \cdot 8^{-2} \cdot 2^{-4}}{21^3 \cdot 14^{-3}} = \{6\} \quad \text{ b) } \frac{(-2)^3}{(-3)^2} : \frac{-4^2}{3^3} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{ c) } \left(\frac{10^{-15} \cdot 10^4}{10^{-13}}\right)^2 = \{10^4\} \quad \text{ d) } \frac{0,5^{-3}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^{-2}} = \{2\}$$

$$\text{ e) } \frac{2,7 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{-4}} = \{12 \cdot 10^8\} \quad \text{ f) } 5,0,2^{-2} + (5,0,2)^{-2} = \{126\}$$

$$\text{ g) } 8 \cdot 2^4 + 9 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^4 - 11 \cdot 2^3 = \{32\}$$

Odmocniny

1. Vypočítejte (částečně odmocněte):

a) $\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{63} = [0]$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50} = [8\sqrt{2}]$

c) $\sqrt{8} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{18} = [13\sqrt{2}]$

d) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} = [11\sqrt{3}]$

e) $\sqrt[3]{(a^6 b^9)^2} = [a^4 b^6]$

f) $\sqrt[8]{a^7} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^4} = [a^2]$

g) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = [2]$

h) $\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}\right)^4 = [a^3]$

i) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt{45} \cdot \sqrt[3]{40}} = \left[\frac{1}{6}\right]$

j) $\left(\sqrt[5]{\frac{k^6}{\sqrt{k}}}\right)^2 = [\sqrt[5]{k^{11}}]$

k) $\sqrt[3]{125 \cdot 5} - 7 \cdot \sqrt[3]{40} + 10 \cdot \sqrt[3]{5} - 4 \cdot \sqrt[3]{320} + 2 \cdot \sqrt[3]{625} = [5 \cdot \sqrt[3]{5}]$

l) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + 4 \cdot \sqrt[3]{16} = [5 \cdot \sqrt[3]{2}]$

m) $\left(\sqrt[4]{16a^8} \cdot \sqrt[3]{b^4}\right)^3 = [8a^6 b]$

2. Usměrněte zlomky

a) $\frac{4}{\sqrt{8}} = [\sqrt{2}]$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

c) $\frac{12}{\sqrt{6}} = [2\sqrt{6}]$

d) $\frac{20}{\sqrt{5}} = [4 \cdot \sqrt{5}]$

e) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \left[\frac{\sqrt[4]{x}}{x}\right]$

g) $\frac{2}{2 - \sqrt{2}} = [2 + \sqrt{2}]$

h) $\frac{5a^2}{\sqrt[5]{a^3}} = \left[\frac{5 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^3}\right]$

i) $\frac{8}{\sqrt{8} + 4} = [4 - \sqrt{8}]$

j) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \left[3 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{18}\right]$

k) $\frac{\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5}} = \left[\frac{4 \cdot \sqrt{10} - 13}{3}\right]$

3. Upravte výrazy, neodmocňujte:

$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{8}) = [6]$

$\sqrt{3}(\sqrt{4} + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{12}) = [9]$

$(\sqrt{7} - 4 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{7} = [7 - 4 \cdot \sqrt{21}]$

$(\sqrt{5} + 3) \cdot (7 - \sqrt{5}) = [16 + 4 \cdot \sqrt{5}]$

$\left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\right) = [-1,5 - \sqrt{6}]$

Mocniny s racionálním exponentem

1. Převeďte na mocniny a vypočítejte:

a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{x}\right]$

b) $\sqrt[4]{\frac{z}{\sqrt[5]{z^3}}} = [\sqrt[10]{z}]$

c) $\sqrt[5]{\left(\frac{x^{-1} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-3}} = [\sqrt{x}]$

d) $\frac{y}{\sqrt[5]{y} \cdot \sqrt[3]{y^5}} = [\sqrt[15]{y^7}]$

e) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{x \cdot \sqrt{x}}} = \left[\frac{1}{\sqrt[12]{x^7}} = \frac{\sqrt[12]{x^5}}{x}\right]$

f) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x \cdot x}}{\sqrt{x}}} = [\sqrt[6]{x}]$

2. Převed'te na odmocniny a vypočítejte

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} &= [4] & \text{b) } 3.4^{-\frac{1}{2}} + 2.0,008^{-\frac{1}{3}} + 16^{0,25} + 0,16^{-0,5} &= [16] \\ \text{c) } \left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} \cdot a^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{5}{6}\sqrt{a}\right] \\ \text{d) } 2.0,01^{-0,5} + 27^{-\frac{1}{3}} + 4^{-\frac{1}{2}} + 3.0,001^{-\frac{1}{3}} &= \left[50\frac{5}{6}\right] \end{aligned}$$

Výrazy

Vzorce

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Vytýkání před
závorku

$$ax \pm bx \pm cx = x \cdot (a \pm b \pm c)$$

$$-a - b = -(a + b)$$

U všech příkladů, kde se vyskytuje proměnná ve jmenovateli, uvádějte podmínky řešitelnosti (jmenovatel musí být různý od nuly).

1. Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{-x^2 - (10 - x)}{x^3}$ pro: a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

$$\left[\text{a) } \frac{16}{27} \text{ b) } 2 \text{ c) } 12 \text{ d) } \frac{15}{32} \text{ podm.: } x \neq 0 \right]$$

2. Upravte výrazy:

$$\text{a) } 7y^2 \cdot 10y^4 + 20y^3 \cdot 7y^{-1} - 30y \cdot 9y =$$

$$\text{b) } 3x^{-10} \cdot 8x^7 - 2x^{10} \cdot 2x^{-13} - 3x^{-6} \cdot 9x^3 =$$

$$\text{c) } 3a^{-1} \cdot 8a^{-1} + 2a^8 \cdot 2a^{-10} - 3a^{-3} \cdot 9a =$$

$$\text{d) } y^4 \cdot 10y + 12y^3 \cdot 5y^2 - y^5 =$$

3. Vydělte výrazy:

$$\frac{125x^7}{25x^{-6}} =$$

$$\frac{81m^8}{9m^{-4}} =$$

$$\frac{12a^{-4}}{4a^{-6}} =$$

$$\frac{74y^{-6}}{2y^5} =$$

$$\frac{25x^{-7}}{5x^{-7}} =$$

4. Vydělte a upravte výrazy:

$$\text{a) } \frac{12a^7}{4a^4} + \frac{12a^9}{2a^9} - \frac{600a^4}{120a} - \frac{150a}{30a} = \{-2a^3 + 1\} \quad \text{b) } \frac{40a^9}{8a^{-5}} + \frac{34a^{10}}{17a^{10}} - \frac{54a^{16}}{9a^2} - \frac{18a^2}{9a^2} = \{-a^{14}\}$$

$$\text{c) } \frac{35x^{-12}}{5x^{-2}} + \frac{72x^5}{8x} - \frac{63x^{-5}}{7x^5} - \frac{50x^{-2}}{10x^{-6}} = \{-2x^{-10} + 4x^4\}$$

$$\text{d) } \frac{100b^{-3}}{25b^{-3}} + \frac{12b^3}{2b^{-3}} - \frac{500b^3}{50b^3} - \frac{81b^{-3}}{9b^{-9}} = \{-3b^6 - 6\}$$

5. Upravte výrazy:

$$\text{a) } 2x \cdot (5x^4 - 7x) + 3x^2 \cdot (5x^3 - 7) =$$

$$\{5x^2 \cdot (5x^3 - 7)\}$$

$$\text{b) } 4b \cdot (x^2 + 4x - 9) - 2b \cdot (x^2 + 8x - 18) =$$

$$\{2bx^2\}$$

$$\text{c) } 3 \cdot (4x^2 + x) + 2x \cdot (x^2 - 6x) + 6 \cdot (2x^2 - x) - 2 \cdot (6x^2 - 1,5x) =$$

$$\{2x^3\}$$

$$\text{d) } (5a^3 - 7a) \cdot 3a - 15 \cdot (a^4 + a^2) - 2a \cdot (2a - 5a^3) =$$

$$\{10a^2 \cdot (a^2 - 4)\}$$

$$\text{e) } 14y^8 - 2y \cdot (8y^7 - 1) - 2y - (-2y^8 - 6) =$$

$$\{6\}$$

$$\text{f) } (5b^2 + 2b) \cdot (-1b) + (2b^2 - 7b) \cdot 3 + 5b \cdot (3b^2 - 8b) - 7b \cdot (2b^2 - 3) =$$

$$\{-4b^2 \cdot (b + 9)\}$$

6. Upravte výrazy:

$$\text{a) } (2x^2 - 2x) \cdot (x + 1) =$$

$$\{-4x\}$$

$$\text{b) } (3a - 1) \cdot (a + 1) - (2a - 1) =$$

$$\{3a^2\}$$

$$\text{c) } (3x + 1) \cdot (4x - 1) + (6x + 1) \cdot (1 - 2x) =$$

$$\{5x\}$$

$$\text{d) } (a + 10) \cdot (a + 1) - (a - 1) \cdot (a - 3) =$$

$$\{7 \cdot (2a + 1)\}$$

7. Upravte výrazy podle vzorců:

a) $(1,4y + 12) \cdot (1,4y - 12) =$	$(40x - 0,1) \cdot (40x + 0,1) =$	$(1,1 + 60a) \cdot (1,1 - 60a) =$
b) $(0,9y + 10) \cdot (0,9y - 10) =$	$(20x - 0,5) \cdot (20x + 0,5) =$	$(1,3b + a) \cdot (1,3b - a) =$
c) $(3z - 6)^2 =$	$(6x - 1)^2 =$	$(9y - 2)^2 =$
d) $(10a - 1)^2 =$	$(8b + 3)^2 =$	$(y + 0,5)^2 =$
e) $(b^3 + 1)^2 =$	$(x^5 + 1)^2 =$	$(a^4 + 1)^2 =$
f) $(5y^7 + 1) \cdot (5y^7 - 1) =$	$(0,9a^8 + 13) \cdot (0,9a^8 - 13) =$	$(15x^2 + 1) \cdot (15x^2 - 1) =$

8. Upravte výrazy:

a) $(2y - 4)^2 + (y + 2)^2 =$	b) $(7z - 2)^2 + (z + 10)^2 =$	c) $(10a - 1)^2 + (2a + 1)^2 =$
d) $(3b - 8)^2 + (b + 7)^2 =$	e) $(12x - 2)^2 - (x + 3)^2 =$	f) $(z - 2)^2 - (z - 1)^2 =$

9. Rozložte výraz na součin vytýkáním před závorku:

a) $56x^5 + 16x^4 =$	$144a^2 - 12a - 24 =$	$32a^3 - 24a^2 + 8a =$
b) $225c^3 + 150c^2 + 15c =$	$14x^8 - 14x^7 + 196x^5 =$	$72y^6 - 36y^5 - 18y^4 =$

10. Vytkněte číslo -1 před závorku

$x - 1 =$	$4c + 5 =$	$9 - x =$	$7y + 8 =$	$3 - y =$	$14x^2 - y =$
-----------	------------	-----------	------------	-----------	---------------

11. Zjednodušte výrazy a výsledek upravte vytýkáním před závorku:

a) $4y \cdot (y + 3) + y \cdot (10 - 2y) =$	$\{2y \cdot (y + 11)\}$
b) $7a \cdot (2 + a) - 4a \cdot (3a + 5) + a =$	$\{-5a(a + 1)\}$
c) $5 \cdot (6x + 8y) - (-10y - 20x) =$	$\{50(x + y)\}$
d) $3z \cdot (z + 1) - 2 \cdot (z^2 + z) =$	$\{z(z + 2)\}$
e) $(x + 3) \cdot (x + 1) + (4x - 1) \cdot (x + 3) =$	$\{5x(x + 3)\}$
f) $(y^2 + 4y) \cdot (2y - y^2) + (2y^2 - y) \cdot (5y^2 - y) =$	$\{9y^2(y^2 - y + 1)\}$
g) $(7a + 2) \cdot (a - 5) + (2a + 1) \cdot (a + 7) =$	$\{3(3a^2 - 6a - 1)\}$
h) $(2x + 1) \cdot (x - 1) - (x - 1) \cdot (x + 1) =$	$\{x(x - 1)\}$

12. Rozložte výraz na součin podle vzorce:

$100x^2 - 225 =$	$x^4 - 1 =$	$0,16 - 900y^2 =$	$a^{10} - 10\,000 =$	$225x^4 - y^6 =$
$169a^4 - 81b^2 =$	$225x^2 - 36 =$	$0,25a^6 - 400 =$	$0,16x^2 - 2500 =$	$x^8 - 1 =$

13. Rozložte výraz na součin podle vzorců:

$w^2 - w + 0,25 =$	$c^2 - 100c + 2500 =$	$9a^2 - 12a + 4 =$	$16x^2 - 48x + 36 =$
$64m^2 + 96mn + 36n^2 =$	$x^2 - 4xy + 4y^2 =$	$100a^2 - 20ab + b^2 =$	$4x^2 + 28x + 49 =$

14. Rozložte výraz na součin dvou závorek:

a) $2a^2 + 2a + 5a + 5 =$	$2ax + 2bx - a - b =$	$3ax + 2ay + 3x + 2y =$
b) $2a + 2b - ax - bx =$	$6 + 3y - 2x - xy =$	$y + 1 - xy - x =$
c) $rs - 3r + 3 - s =$	$ab - 4a - 12 + 3b =$	$14y - 2xy + x - 7 =$
d) $4a - a^2 - ab + 4b =$	$2ax - 2bx - by + ay =$	$6x^2 + 4xy - 15x - 10y =$
e) $35x - 7x^2 - 5 + x =$	$xy - x - y + 1 =$	$4x - 4xy + 3y - 3y^2 =$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } (a + 1)(2a + 5); (2x - 1)(a + b); (a + 1)(3x + 2y) \quad \text{b) } (a + b)(2 - x); (3 - x)(2 + y); (y + 1)(1 - x) \\ \text{c) } (r - 1)(s - 3); (a + 3)(b - 4); (2y - 1)(7 - x) \quad \text{d) } (4 - a)(a + b); (2x + y)(a - b); (3x + 2y)(2x - 5) \\ \text{e) } (7x - 1)(5 - x); (x - 1)(y - 1); (4x + 3y)(1 - y) \end{array} \right\}$

Lomené výrazy

Vykraťte zlomek - upravte lomené výrazy a stanovte podmínky:

1. a) $\frac{4x^4}{8x} = \frac{45x^{12}}{9x^{14}} = \frac{-26a^4}{-13a^3} = \frac{4y^2}{16y^3} = \frac{-40c^9}{-8c^{10}} = \frac{55y^4}{11y^8} = \frac{25a^4b}{35ab^{10}} =$

b) $\frac{45x^4y^2}{18x^8y} = \frac{12a^4b^3}{18a^3b^4} = \frac{4x^4y^4}{8x^8y^6} = \frac{4x^4y^5z^6}{20x^3y^6z^6} = \frac{6x \cdot 4x^8 \cdot 2x}{10x^4 \cdot 2 \cdot 3x^5} = \frac{6x^4yz}{18x^2yz^2} = \frac{3y^3 \cdot y \cdot 8y^2}{4y \cdot 2y^2 \cdot 2} =$

$\{a) \frac{x^3}{2}; \frac{5}{x^2}; 2a; \frac{1}{4y}; \frac{5}{c}; \frac{5}{y^4}; \frac{5a^3}{7b^9} \quad \text{b) } \frac{5y}{2x^4}; \frac{2a}{3b}; \frac{1}{2x^4y^2}; \frac{x}{5y}; \frac{4x}{5}; \frac{1x^2}{3z}; \frac{3y^3}{2}\}$

2. Upravte výrazy krácením ve zlomku (nejprve upravte vytýkáním před závorku):

a) $\frac{18y^5 - 6y^3}{6y^3} = \frac{5m^2}{25m^3 - 5m^2} = \frac{16a^5 - 8a^3}{8a^3} = \frac{8a^2}{24a^3 + 4a^2} =$

$$b) \frac{20y}{8y-4y^2} = \frac{7a}{21a^3-14a^2} = \frac{8y^3-6y^2}{2y} = \frac{16x^5-24x^3}{8x^2} =$$

$$\left\{ a) 3y^2-1; \frac{1}{5m-1}; 2a^2-1; \frac{2}{6a+1}; b) \frac{5}{2-y}; \frac{1}{a(3a-2)}; y(4y-3); x(2x^2-3) \right\}$$

3. Upravte výrazy krácením ve zlomku (nejprve upravte vytýkáním před závorku):

$$a) \frac{16a-40}{4a-10} = \frac{12b-16}{15b-20} = \frac{8m^2-16m}{3m-6} = \frac{2x+4}{4x^2+8x} = \frac{y^2+6y}{6y+36} =$$

$$b) \frac{9y^2-18y}{3y-6} = \frac{4x+5}{16ax+20a} = \frac{a^2+5}{3a^5+15a^3} = \frac{a^8+1}{2a^9+2a} =$$

$$c) \frac{2y+4}{4y^2+8y} = \frac{5x^4+15x^2}{x^2+3} = \frac{7y^4-28y^3}{2y^3-8y^2} = \frac{5a^6+35a^5}{3a^2+21a} =$$

$$\left\{ a) 4; \frac{4}{5}; \frac{8m}{3}; \frac{1}{2x}; \frac{y}{6} b) 3y; \frac{1}{4a}; \frac{1}{3a^3}; \frac{1}{2a} c) \frac{1}{2y}; 5x^2; \frac{7y}{2}; \frac{5a^4}{3} \right\}$$

4. Upravte lomené výrazy:

$$\frac{2-k}{k^2-4} = \left\{ -\frac{1}{k+2} \right\} \quad \frac{a-3}{9-3a} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \quad \frac{21-7b}{b-3} = \{-7\} \quad \frac{5-k}{2k-10} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \quad \frac{1-y}{y^2-2y+1} = \left\{ \frac{-1}{y-1} \right\}$$

$$\frac{4m-8}{2-m} = \{-4\} \quad \frac{z-2}{4-2z} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \quad \frac{8c-16}{2-c} = \{-8\} \quad \frac{x-y}{7y-7x} = \left\{ -\frac{1}{7} \right\} \quad \frac{6-2a}{3-a} = \{2\}$$

5. Upravte lomené výrazy (upravte vytýkáním před závorku a rozkladem na součin pomocí vzorců):

$$a) \frac{y^2-9}{4y-12} = \left\{ \frac{y+3}{4} \right\} \quad b) \frac{2x-7}{4x^2-49} = \left\{ \frac{1}{2x+7} \right\} \quad c) \frac{3+y}{y^2-9} = \left\{ \frac{1}{y-3} \right\} \quad d) \frac{4y^2-64}{2y+8} = \{2(y-4)\}$$

$$e) \frac{a-0,5}{a^2-0,25} = \left\{ \frac{1}{a+0,5} \right\} \quad f) \frac{3x-15}{3x^2-75} = \left\{ \frac{1}{x+5} \right\} \quad g) \frac{4a^2-1}{2a+1} = \{2a-1\} \quad h) \frac{4x-8}{8x^2-32} = \left\{ \frac{1}{2(x+2)} \right\}$$

6. Upravte lomené výrazy (upravte vytýkáním před závorku a rozkladem na součin pomocí vzorců):

$$a) \frac{x^2+6x+9}{x+3} = \{x+3\} \quad b) \frac{a+5}{a^2+10a+25} = \left\{ \frac{1}{a+5} \right\} \quad c) \frac{x^2-18x+81}{x-9} = \{x-9\}$$

$$d) \frac{b-10}{b^2-20b+100} = \left\{ \frac{1}{b-10} \right\} \quad e) \frac{y^2+2y+1}{y^2+y} = \left\{ \frac{y+1}{y} \right\} \quad f) \frac{3a-15}{a^2-10a+25} = \left\{ \frac{3}{a-5} \right\}$$

$$g) \frac{9x^2-25}{9x^2+30x+25} = \left\{ \frac{3x-5}{3x+5} \right\} \quad h) \frac{2ay+3a+8y+12}{4ay+6a+16y+24} = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad i) \frac{xa+3a-4x-12}{3a-3+xa-x} = \left\{ \frac{a-4}{a+1} \right\}$$

7. Upravte výrazy:

$$a) \frac{2x+2}{4} + \frac{x-1}{3} - \frac{4x}{5} = \left\{ \frac{x+5}{30} \right\} \quad b) \frac{x-2}{3} - \frac{2x-6}{6} = \left\{ \frac{1}{3} \right\} \quad c) \frac{z-4}{5} - \frac{2z-3}{10} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$d) \frac{x+5}{10} - \frac{2x+10}{5} + \frac{x+3}{2} = \left\{ \frac{x}{5} \right\} \quad e) \frac{a+4}{5} + \frac{2a}{20} - \frac{3a-2}{10} = \{1\} \quad f) \frac{y-4}{10} - \frac{2y-3}{20} = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

$$g) \frac{2x+4}{4} + \frac{2x}{12} - \frac{4x-6}{6} = \{2\} \quad h) \frac{y-1}{2} + \frac{3y+6}{3} - \frac{2y-2}{4} = \{y+2\} \quad i) \frac{d-2}{4} - \frac{2d-6}{8} = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

$$j) \frac{2y+4}{2} + \frac{2y}{6} - \frac{4y-6}{3} = \{4\} \quad k) \frac{3a+4}{4} + \frac{a}{2} - \frac{6a+4}{8} = \left\{ \frac{a+1}{2} \right\}$$

U následujících příkladů: upravte výrazy a uveďte podmínky řešitelnosti (jmenovatel musí být různý od nuly):

8. a) $\frac{3x}{x+1} : \frac{9x}{x^2-1} = \left\{ \frac{x-1}{3}; x \neq \pm 1 \right\}$ b) $\frac{a+2}{a^5} : \frac{a^2-4}{a^6} = \left\{ \frac{a}{a-2}; a \neq 0; \pm 2 \right\}$
- c) $\frac{y-19}{y+1} \cdot \frac{2y+2}{19-y} = \{-2; x \neq 19; -1\}$ d) $\frac{z^2+10z+25}{z-3} \cdot \frac{3z-9}{z+5} = \{3(z+5); a \neq 3; -5\}$
- e) $\frac{12w}{w^2-100} : \frac{6w}{w-10} = \left\{ \frac{w}{w+10}; w \neq 0; \pm 10 \right\}$ f) $\frac{b^2-81}{5b-45} : \frac{b+9}{5} = \{1; b \neq \pm 9\}$
- g) $\frac{x^2-1}{2x-2} : \frac{x+1}{2} = \{1; a \neq \pm 1\}$ h) $\frac{y^2+2y+1}{y+1} : \frac{y+1}{y} = \{y; y \neq 0; -1\}$
9. a) $\frac{6a-12}{3a} - \frac{2a-6}{a} = \left\{ \frac{2}{a}; a \neq 0 \right\}$ b) $\frac{z-4}{z} - \frac{4z-20}{5z} = \left\{ \frac{1}{5}; z \neq 0 \right\}$
- c) $\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{2x} = \left\{ \frac{1}{2}; a \neq 0 \right\}$ d) $\frac{3a+2a^2}{3a^2} + \frac{1}{3} + \frac{1-a}{a} = \left\{ \frac{2}{a}; a \neq 0 \right\}$
- e) $\frac{4}{2} - \frac{2y}{y+1} = \left\{ \frac{2}{y+1}; y \neq -1 \right\}$ f) $\frac{3}{y+3} + \frac{6-4y}{y^2-9} + \frac{1}{y-3} = \{0; a \neq \pm 3\}$
- g) $\frac{2a-8}{a^2-8a+16} - \frac{1}{a-4} = \left\{ \frac{1}{a-4}; a \neq 4 \right\}$ h) $\frac{4y+20}{y^2+10y+25} - \frac{2}{y+5} = \left\{ \frac{2}{y+5}; y \neq -5 \right\}$
- i) $\frac{y^2-7y+12}{y^2-6y+9} + \frac{1}{y-3} = \{1; a \neq 3\}$ j) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{3} - \frac{x^2+5}{3x-3} = \left\{ \frac{1}{3}; x \neq 1 \right\}$
10. $\frac{\frac{k}{k-2} - \frac{2}{2-k}}{\frac{1}{k-2}} = \{k+2\}, k \neq 2$
11. $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 - \frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{b} + 1} = \{2a\} a \neq \pm b, b \neq 0$
12. $\frac{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(1 - \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)}{\frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2}} = \left\{ \frac{x-y}{x+y} \right\} x, y \neq 0, x \neq y$
13. $\left(1 - \frac{x-3}{x+3}\right) : \left(\frac{1}{3+x} + \frac{x}{9-x^2}\right) = \{6-2x, x \neq \pm 3\}$
14. $\left(\frac{2}{y-2} - \frac{4}{y^2-4} + \frac{2y}{y+2}\right) : \left(\frac{1}{y^2-4} + \frac{1}{y+2}\right) = \{y\} y \neq \pm 2$
15. $\frac{\frac{4}{k-6} - \frac{1-14k+k^2}{36-k^2}}{\frac{1}{6-k} - 1} = \left\{ \frac{5-k}{6+k} \right\}, k \neq 5, k \neq \pm 6$

Mnohočleny

1. Dělte a uveďte podmínky pro dělitele, správnost výsledků ověřte vynásobením dosazením

- a) $(10 + 6a^3 - 13a^2 - 9a) : (2a - 5) =$ $\{3a^2, a \neq 2,5\}$
 b) $(x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3) =$ $\{x^2 + 2x - 1, x \neq 3\}$
 c) $(11a^2 - 5a + 2a^3 - 24) : (2a - 3) =$ $\{a^2 + 7a + 8, a \neq 1,5\}$
 d) $(y^3 + y^2 - 3y - 3) : (y + 1) =$ $\{y^2 - 3, y \neq -1\}$
 e) $(15x^2 - 23x + 4) : (5x - 1) =$ $\{3x - 4, x \neq 0,2\}$
 f) $(20x^2 + 14x - 6) : (3 - 10x) =$ $\{-2x - 2, x \neq 0,3\}$

Rovnice

Proměnná ($x, y, z, \dots$) v rovnici se nazývá **neznámá**.

Řešit rovnice znamená najít taková čísla, která z ní po dosazení do rovnice za neznámou vytvoří platnou rovnost. Každé takové číslo nazýváme **kořenem** nebo **řešením** dané rovnice. Výsledek lze zapsat jako množinu kořenů $K = \{-2; 3\}$

Ekvivalentní úpravy:

Ekvivalentní úpravy rovnice, ale zachovávají stejné řešení.

Zkouškou nazýváme kontrolu správnosti řešení, kterou provedeme dosazením kořenů do původní rovnice.

1. zrcadlová výměna levé a pravé strany rovnice bez dalších úprav

$$\begin{array}{ll} -5 = x & \text{nebo} \quad 1 - y = 32 \\ x = -5 & 32 = 1 - y \end{array}$$

2. přičtení - odečtení téhož čísla (nebo neznámé) k oběma stranám rovnice (neboli převedení z jedné strany na druhou s opačným znaménkem)

$$\begin{array}{ll} 3x - 8 = 12 & \text{nebo} \quad x = 4 + x \\ 3x = 12 + 8 & x - x = 4 \end{array}$$

3. vynásobení nebo vydělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem

$$\begin{array}{l} 5x = 15 \quad :5 \\ x = 3 \end{array}$$

4. úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice

$$\begin{array}{l} 5x - 2x + x = 12 - 8 \\ 4x = 4 \end{array}$$

Někdy se neznámá v rovnici odečte a zůstane např.: $0x = 0$; nebo $0x = -5$

pokud vyjde $0 = 0$

— rovnice má nekonečně mnoho řešení

pokud vyjde $0 = -5$

— rovnice nemá řešení

Lineární rovnice

$$\begin{array}{l} ax = b \\ x = \frac{b}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x = a \\ x = -a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x = -a \\ x = a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + a = b \\ x = -a + b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ x \cdot b = a \cdot y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ x = \frac{a \cdot y}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pro } a \neq 0 \\ a \cdot x = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

Rovnice v součinném a podílovém tvaru

$$\begin{array}{l} a \cdot b = 0 \\ \text{buď } a = 0 \\ \text{nebo } b = 0 \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = 0 \quad \text{pak } a = 0$$

Nerovnice v součinném a podílovém tvaru

Součin $a \cdot b > 0$ či podíl $\frac{a}{b} > 0$ dvou výrazů je kladný, pokud jsou oba výrazy buď kladné nebo oba záporné.
 $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

Součin $a \cdot b < 0$ či podíl $\frac{a}{b} < 0$ dvou výrazů je záporný, pokud je jeden výraz kladný a druhý záporný
 $(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Lineární rovnice

1. Řešte rovnice a proveďte zkoušku

a) $\frac{c-2}{3} = \frac{c+4}{5}$

b) $\frac{a}{6} - \frac{a+4}{3} = \frac{a}{5} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{6} = x - 1$

d) $\frac{n+3}{4} = 2 + \frac{n-4}{5}$

e) $1 + \frac{2x-5}{6} = \frac{x}{3}$

f) $\frac{1}{5}y + 0,7y = 2 - \frac{y}{2}$

g) $\frac{z-2}{2} + 1 = \frac{2z+2}{2}$

h) $\frac{x-3}{5} - \frac{x-5}{3} = 1$

i) $\frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = \frac{5y}{12}$

j) $\frac{2}{3} - \frac{x}{6} - 1 = 1 - \frac{4+0,5x}{3}$

k) $\frac{x}{4} - \frac{1-x}{8} = \frac{x}{8} - \frac{2-3x}{12} + \frac{x}{12}$

l) $\frac{3}{4}(a-1) - \frac{a-1}{3} = \frac{1}{2}a - \frac{a}{3} + \frac{1}{12}$

m) $2b+1 = \frac{2}{3}(b+3) - \frac{1}{2}(b+2)$

n) $1 - \frac{y+1}{12} = 2 - \frac{1-y}{8} + \frac{1}{12}$

o) $0 = \frac{1}{2}(2-y) - \frac{4-2y}{4} + y$

p) $\frac{1}{4}(x+3) - \frac{1}{2}(2x-6) = \frac{2}{3}(x-5)$

q) $\frac{1}{3}(x+3) - \frac{1}{4}(x+2) = \frac{1}{2}(2x+1)$

r) $\frac{a}{5} - \frac{1-a}{2} = a - \frac{1-a}{5} + 0,2$

s) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-2}{3} - \frac{3x-3}{2} = 2 - \frac{x+1}{12}$

[a) 11 b) -5 c) 1 d) 9 e) NŘ f) $\frac{10}{7}$ g) -2 h) $\frac{1}{2}$ i) -3 j) R k) $\frac{1}{2}$ l) 2 m) 0 n) -5 o) 0 p) 5 q) 0 r) -1 s) 0]

2. Pro které reálné hodnoty neznámé není rovnice definována? Určete množinu všech řešení rovnice.

U všech příkladů, kde se vyskytuje neznámá ve jmenovateli, uvádějte podmínky řešitelnosti (jmenovatel musí být různý od nuly).

a) $\frac{8+3y}{4y-6} + \frac{6y-2}{10y-15} = \frac{7}{6} - \frac{5}{2y-3}$

[y = -33, y ≠ 1,5]

b) $2 - \frac{x+5}{x-7} = \frac{x+3}{x-5}$

[x = 5,8 x ≠ 7, x ≠ 5]

c) $\frac{7}{a+3} - \frac{10}{a^2-9} = -\frac{3}{a-3}$

[a = 2,2]

d) $\frac{3x+7}{x-5} - \frac{5+x}{x} \cdot 3 - \frac{25-3x}{x^2-5x} = 0$

[x = -5, x ≠ 0, x ≠ 5]

e) $\frac{6-z}{1+z} - \frac{2(4z-3)}{z^2-1} = \frac{z}{1-z}$

[z = R / { -1, 1 }]

f) $\frac{4}{6-p} - \frac{(5p-2)p}{36-p^2} = \frac{5p}{6+p}$

[p = 1, p ≠ 6, p ≠ -6]

g) $\frac{2x-1}{5-x} + 4 = \frac{3+2x}{x-2}$

[x = $\frac{53}{16}$, x ≠ 5, x ≠ 2]

h) $\frac{6y-1}{5-4y} = \frac{4-3y}{2y-5}$

[y = -15, y ≠ $\frac{5}{2}$, y ≠ $\frac{5}{4}$]

i) $\frac{5}{y+1} - 7 = \frac{10-7y}{y-1}$

[y = 4, y ≠ 1, y ≠ -1]

Slovní úlohy řešené pomocí rovnic

- Košile stojí 150 Kč, tričko dvaapůlkrát méně. Kolik triček je možno koupit za 240 Kč? (4)
- Vladimír navštívil fastfood a měl veliký hlad, utratil 76 EUR. Cola byla 3x levnější než sandwich, káva byla o tři eura levnější než sendvič, pizza byla třikrát dražší než sandwich, hamburger byl o 3 eura dražší než sandwich. Zjisti kolik jednotlivé položky stály. (12, 4, 9, 36, 15)
- Ve škole studuje celkem 600 žáků. V prvním ročníku je o 40 více žáků než ve čtvrtém ročníku, ve třetím ročníku jejich o třetinu méně než v druhém ročníku, ve čtvrtém ročníku jejich dvakrát méně než ve třetím ročníku. Vypočítej, kolik žáků studuje v jednotlivých ročnících. (120, 240, 160, 80)
- V parku rostou lípy, javory, smrky a borovice. Lip je dvakrát více než javorů, smrků je o patnáct více než lip a borovic je dvakrát více než smrků. Dohromady je tam 225 stromů. Kolik kterých druhů roste v parku? (40, 20, 55, 110)

5. Káva v kelímku stojí 7 Kč. Káva je o 6 Kč dražší než kelímeček. Kolik stojí kelímeček?
6. V prodejně měli žlutá, červená, modrá a zelená trička. Žlutých byla $\frac{1}{10}$ celkového počtu, modrých byla $\frac{1}{15}$ celkového počtu, zelených byla $\frac{1}{5}$ celkového počtu a červených bylo 95 kusů. Vypočítejte kolik triček bylo celkem v prodejně a kolik kterých barev. (15, 10, 30, 95)
7. Petr spotřeboval při vaření $\frac{3}{4}$ celkového množství brambor, zůstalo mu $\frac{3}{4}$ kg brambor. Kolik kg spotřeboval a kolik bylo celkem kg brambor? (2,25; 0,75)
8. Jana koupila tričko a čepici za 700 Kč. Tričko bylo o $\frac{1}{3}$ dražší než čepice. Kolik stálo tričko a čepice? (400, 300)
9. Obvod trojúhelníku je 15,5 cm. Strana **a** je o 2 cm delší než strana **b**. Strana **c** je dvakrát menší než strana **a**. Kolik měří která strana? (7; 5; 3,5)
10. Žáci při úpravě okolí školy vysázeli první den $\frac{1}{3}$ celkového počtu stromků, druhý den $\frac{2}{5}$ zbytku po prvním dnu a třetí den 144 stromků. Kolik jich celkem vysázeli? (360 stromků)
11. Součástka měla před opracováním hmotnost 168 g. Jakou hmotnost měla součástka opracovaná, je-li hmotnost odpadu dvacetkrát menší než hmotnost opracované součástky? (160 g)
12. Otec je 42 let. Jeho třem dcerám je 16, 13 a 5 let. Za kolik let se bude věk otce rovnat součtu let jeho dcer? (4)
13. V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu γ pětikrát menší než velikost vnitřního úhlu β . Úhel α je třikrát větší než γ . Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC. (60°, 100°, 20°)
14. V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu β o 55° větší než velikost vnitřního úhlu γ . Úhel α je dvakrát menší než γ . Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC. (25°, 105°, 50°)
15. Při úpravě terénu pro stavbu věžového domu pracují 3 stavební čety. První četa by práci vykonala za 12 dní, druhá za 20 dní, třetí za 15 dní. Za jak dlouho splní celý úkol společně? (5 dní)
16. Hotový chléb má hmotnost o 45 % větší než mouka, ze které je vyroben. Kolik mouky se spotřebuje na výrobu 60 dvoukilogramových bochníků? (asi 82,8 kg)
17. Vypočítejte stranu čtverce, jestliže zvětšíme jednu stranu čtverce o 10 cm a druhou zmenšíme o 8 cm a dostaneme tak obdélník, který má též plošný obsah jako původní čtverec. (40 cm)
18. Dva obchody měly stejnou tržbu. První zvýšil tržbu o 6 %, druhý o 11 %. Oba obchody měly dohromady tržbu 54 250 Kč. Jaká byla původní tržba obchodu? (25 000 Kč)
19. Na večírek přišlo třikrát více chlapců než děvčat. Po odchodu 8 chlapců a 8 děvčat zbylo na večírku pětikrát více chlapců než děvčat. Kolik chlapců a kolik děvčat přišlo na večírek? (16 dívek, 48 chlapců)
20. Firma si účtuje za vybavení kanceláře žaluziemi celkem 2 650 Kč. Z dodacího listu je patrné, že žaluzie byly o 954 Kč dražší než jejich instalace. Kolik procent z účtované částky tvoří instalace žaluzií? (32 %)
21. Na rodinnou oslavu přichystali dvakrát více lahví piva než vína. Po hodině, kdy se vypilo 10 lahví piv a 10 lahví vína, zůstalo čtyřikrát více lahví piva než vína. Kolik lahví piva bylo připraveno na oslavu? (30 lahví)
22. Karel sní pizzu za 15 minut, Eva za půl hodiny a Jirka za 10 minut. Jak dlouho jim bude trvat, když se na jednu pizzu vrhnou všichni najednou? (5)
23. Karlovi trvá instalovat v učebně počítače 4 hodiny. Marek by to stihl za 2 hodiny. Ondřejovi by to zabralo 3 hodiny. Karel začal pracovat sám, po hodině mu přišel na pomoc Marek. A za další hodinu přišel pomáhat Ondřej. Zjistí, za jak dlouho byla učebna nainstalována, když postupně po hodině začali pomáhat další pracovníci. Kolik hodin každý z těch tří odpracoval? (2, 1, 0)
24. Jana a Petr pracovali u stejné firmy, každý den 10 hodin. Jana měla o třetinu větší hodinovou mzdu než Petr. Po práci šli společně na večeři, za stejný pokrm zaplatili stejnou částku. Jana vydala 15 % denního výdělku a Petr 20 % denního výdělku. Společně za večeři zaplatili 600 Kč. Jaký byl denní výdělek Petra a Jany? (1500, 2000)
25. Eva bydlí s Pavlem ve stejném místě. Vyjela svým autem průměrnou rychlostí 60 km/h. Za $\frac{3}{4}$ hodiny vyjel za ní stejným směrem Pavel rychlostí 105 km/h. Za jak dlouho ji dostihl a kolik kilometrů ujel?
26. Dva cyklisti vzdálení 800 m, vyjela proti sobě rychlostí 25 km/h a 15 km/h. Za jak dlouho se střetnou a kolik metrů ujede ten rychlejší? (1 m 12 s, 500 m)
27. Dva litry 80% lihu potřebujeme naředit na 50 %. Kolik musíme přilít vody? (1,2 l)
28. Decilitr 15% vína smícháme s 5 cl 40% vodky a dolejeme 2 dl limonády. Kolik % alkoholu bude obsahovat výsledný míchaný nápoj? (10 %)
29. V prodejně PC prodali první den polovinu zásob, druhý den třetinu zbývajících počtu, třetí den čtvrtinu zbývajících počtu a čtvrtý den o 10 kusů více než druhý den. Zjistí kolik se který den prodalo. (60,20,10,30)

Řešení soustav rovnic

Řešte soustavy rovnic, proveďte zkoušku.

- 1) a) $3x + 2y = 4$
 $x - y = 8$
- b) $3x + 5y = 18$
 $4x - 2y = -2$
- c) $4x + 2y = 12$
 $-6x - 3y = -18$
- d) $2x - y = -5$
 $x + 4y = 11$
- e) $x + y = 4$
 $x + y = 5$
- f) $12x - y = 3$
 $4x + 5y = -15$
- g) $x + y = 7$
 $x - y = 1$
- h) $x - y = -5$
 $y - x = 5$

2)
$$4x - 2 = \frac{5y - 6x}{13} + 3y$$
$$\frac{-2x + 3y}{4} - 12 = \frac{5y - 6x}{6} - 2x$$
$$[x = 5, y = 6]$$

3) $5(y + 2) = -3(x - 3) + 7$
 $3(y + 2) + 23 = 5(x - 3)$
$$[x = 7, y = -3]$$

4)
$$\frac{5x - 3y}{3} = \frac{2y - 3x}{5} + x + 1$$
$$\frac{4x - 3y}{2} = \frac{3y - 2x}{3} + y + 1$$
$$[x = 3, y = 2]$$

5)
$$\left(\frac{1}{a} - \frac{3}{ab}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{4}{ab}\right) = 1$$
$$(a + 3)\left(b - \frac{3}{2}\right) = ab$$
$$[a = -11, b = -4] \quad a \neq 0, b \neq 0$$

6) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 10 = x(x + 6) + y(y + 6)$
 $(x + 1)^2 - (y - 1)^2 + 8 = x(x - 6) - y(y - 6)$
$$[x = 1, y = 2]$$

7)
$$\frac{b - 2}{3} = 2 - \frac{a + 2}{3}$$
$$\frac{a + b}{6} = \frac{b - 3}{2}$$
$$[a = 1, b = 5]$$

8)
$$8 - \frac{b}{3} = \frac{a - 2b}{4} + \frac{a}{2}$$
$$\frac{2a + b}{5} - 3 = \frac{3a - 5b}{2}$$
$$[a = 12, b = 6]$$

Slovní úlohy řešené pomocí soustavy dvou rovnic

- Do 26 lahví, z nichž některé jsou půllitrové a některé mají objem 0,7 l, máme uskladnit 15 l malinového sirupu. Kolik musíme mít lahví půllitrových a kolik o objemu 0,7 l? (10 ks → 7 dl, 16 ks → 5 dl)
- Účetní měla v pokladně v hotovosti 1 750 Kč ve 23 bankovkách, zčásti padesátikorunových, zčásti stokorunových. Kolik bylo kterých bankovek? (12 ks → 100, 11 ks → 50)
- 54 Kč jsme zaplatili ve dvoukorunách a pětikorunách. Dohromady máme 15 mincí. Kolik jsme měli pětikorun a kolik dvoukorun? (8 ks → 5 Kč, 7 ks → 2 Kč)
- Na školním výletě spali chlapci v chatkách a platili 200 Kč za noc, dívky spaly v hotelu a platily 250 Kč za noc. Dohromady bylo 22 chlapců a dívek, celkem všichni zaplatili 4 900 Kč. Kolik bylo chlapců a kolik dívek? (10 dívek, 12 chlapců)

Soustavy nerovnic

Řešte soustavy nerovnic v R

- 1) $2 - (x + 2) \cdot (x - 3) \leq 4x - x \cdot (x - 5)$ $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{3} < 2 + \frac{x}{6}$ $\{K = \langle 1; \infty \rangle\}$
- 2) $6x - (4x + 1)^2 \leq 2x(5 - 8x) + 5$ $\frac{x+2}{4} - \frac{2x+1}{12} - \frac{3}{8} \leq 0$ $\{K = \{-0,5\}\}$
- 3) $\frac{2}{3}x(x-2) - \frac{1}{2} < \frac{1}{3}(2x^2 + 4)$ $3 \cdot \frac{x+2}{5} \cdot 2 - 0,6 < \frac{9}{5}$ $\{K = \left(-\frac{11}{8}; 0\right)\}$
- 4) $\frac{3+4y}{5} - 4 \geq \frac{7-y}{2} - 3$ $(4-y) \cdot 5 + \frac{5}{3}y \leq (4-y) \cdot 2$ $\{K = \langle 9; \infty \rangle\}$
- 5) $\frac{1}{2} \cdot (3 + 3a) > (2a - 1) \cdot 3$ $2a - 5 \leq (a - 1) \cdot 3$ $\{K = \langle -2; 1 \rangle\}$
- 6) $5 \cdot (4 - y) + \frac{5}{3}y < (4 - y) \cdot 2$ $\frac{3+4y}{5} - 4 \geq \frac{7-y}{2} - 3$ $\{K = (9; \infty)\}$
- 7) $3 \cdot (2 - a) - 2a + 3 < -4(a - 1)$ $(3a - 1) + 2(3a + 1) < (2a + 1) \cdot 3$ $\{K = \left(-1; \frac{2}{3}\right)\}$
- 8) $\frac{x+2}{3} < x \leq 3 - \frac{x-3}{2}$ $\{K = (1; 3)\}$
- 9) $\frac{a+2}{3} \geq 1 < a - \frac{1-a}{2}$ $\{K = (1; \infty)\}$

$$\mathbf{x \cdot y > 0 \text{ nebo } \frac{x}{y} > 0 \rightarrow x > 0, y > 0 \text{ nebo } x < 0, y < 0}$$

$$\mathbf{x \cdot y \geq 0 \rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \text{ nebo } x \leq 0, y \leq 0}$$

$$\mathbf{\frac{x}{y} \geq 0 \rightarrow x \geq 0, y > 0 \text{ nebo } x \leq 0, y < 0}$$

$$\mathbf{x \cdot y < 0 \text{ nebo } \frac{x}{y} < 0 \rightarrow x > 0, y < 0 \text{ nebo } x < 0, y > 0}$$

$$\mathbf{x \cdot y \leq 0 \rightarrow x \geq 0, y \leq 0 \text{ nebo } x \leq 0, y \geq 0}$$

$$\mathbf{\frac{x}{y} \leq 0 \rightarrow x \geq 0, y < 0 \text{ nebo } x \leq 0, y > 0}$$

Řešíme nerovnici $(x+2)(2x-1) \geq 0$.

Vlevo součin dvou čísel, vpravo nula $\Rightarrow$ jde pouze o znaménko součinu na levé straně.

Kdy je součin dvou čísel kladný?

a) Obě závorky budou kladné:

$$(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$(2x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Plníme obě podmínky} \Rightarrow K_1 = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle.$$

b) Obě závorky budou záporné:

$$(x+2) \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$$

$$(2x-1) \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Plníme obě podmínky} \Rightarrow K_2 = (-\infty; -2\rangle.$$

$$\text{Všechna řešení dohromady } K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -2\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle.$$

$$1. \text{ a) } \frac{1}{x+2} > 0 \quad \{x \in (-2; \infty)\} \quad \text{b) } \frac{3x-1}{2} \leq 0 \quad \{x \in (-\infty; \frac{1}{3}]\} \quad \text{c) } \frac{2y-5}{-10} \geq 0 \quad \{x \in (-\infty; 2,5]\}$$

$$2. \text{ a) } \frac{2x+1}{x+2} > 1 \quad \{x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)\} \quad \text{b) } \frac{x-5}{x-1} < 0 \quad \{x \in (1; 5)\}$$

$$3. \text{ a) } \frac{15-x}{x-6} \leq 0 \quad \{x \in (-\infty; 6) \cup (15; \infty)\} \quad \text{b) } \frac{x-2}{x+2} \geq 2 \quad \{x \in \{-6; -2)\}$$

$$4. \text{ a) } (x-2) \cdot (x+4) \geq 0 \quad \{x \in (-\infty; -4\rangle \cup (2; \infty)\} \quad \text{b) } (x+6) \cdot (x-3) \leq 0 \quad \{x \in \{-6; 3\}\}$$

$$5. \text{ a) } (2x-3) \cdot (7-3x) > 0 \quad \{x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)\} \quad \text{b) } (x-3) \cdot (x+5) > 0 \quad \{x \in (-\infty; -5) \cup (3; \infty)\}$$

Kvadratická rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje druhá mocnina (kvadrát) neznámé. Obvykle x^2 .

Obecná rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Koeficienty rovnice $a, b, c \in R, a \neq 0$

Neznámá je x . Kořeny rovnice jsou pak x_1, x_2 .

ax^2 – kvadratický člen

bx – lineární člen

c – absolutní člen

Diskriminant
kvadratické rovnice

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$ – rovnice má 2 kořeny (2 řešení)

$D = 0$ – rovnice má 1 dvojnásobný kořen (1 řešení)

$D < 0$ – rovnice nemá kořen (nemá řešení)

Kořeny kvadratické
rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Pokud je $D = 0$, použijeme $x = \frac{-b}{2a}$

Ryze kvadratická
rovnice

$$ax^2 + c = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Rovnice bez
absolutního členu

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x \cdot (ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

Normovaná
kvadratická rovnice,
Viètovy vzorce

$$1x^2 + bx + c = 0$$

Pro kořeny rovnice pak platí:

$$c = x_1 \cdot x_2$$

$$-b = x_1 + x_2$$

Vztahy mezi kořeny a
koeficienty
kvadratické rovnice

Kořeny rovnice
 $ax^2 + bx + c = 0$
jsou x_1 a x_2

Pak lze kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložit na součin:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

1. Řešte kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, správnost řešení ověřte zkouškou:

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$100x^2 - 30x + 2 = 0$

$10x^2 + 9x = 1$

b) $20x^2 - 5x = -3$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$10x^2 + x = -10$

c) $2x^2 + 112 = -30x$

$3x^2 + 6x = 45$

$x^2 + 144 = 24x$

d) $2x^2 - 8 = 0$

$3x^2 + 6x = 0$

$5x^2 = 4x$

e) $x - \frac{7}{x} = \frac{2}{x}$

$\frac{2x}{11} - \frac{6}{11x} = 1$

f) $1,5x + \frac{3}{2x} = 3$

$3x - \frac{1}{12x} = 0$

2. Řešte kvadratické rovnice pomocí Viètových vzorců, správnost řešení ověřte zkouškou:

Řešení (kořeny) kvadratické rovnice: $1x^2 + bx + c = 0$ ■ $-b = x_1 + x_2$ ■ $c = x_1 \cdot x_2$

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - x - 110 = 0$

$x^2 + x - 42 = 0$

$x^2 + 5x - 24 = 0$

c) $x^2 + 11x + 30 = 0$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

3. Uveďte typ rovnice a řešte je bez použití diskriminantu:

$2x^2 - 162 = 0$

[ryze kvadratická, $x_1 = +9$ $x_2 = -9$]

$3x^2 + 8x = 0$

[bez absolutního členu $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{8}{3}$]

$x^2 + 8x - 33 = 0$

[normovaná $x_1 = -11$ $x_2 = 3$]

$-x^2 + 121 = 0$

[ryze kvadr. $x_1 = 11$ $x_2 = -11$]

- $-5x^2 + 8x = 0$ [bez abs.členu. $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{8}{5}$]
 $9x^2 = 1$ [ryze kvadratická, $x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$]
 $9x^2 = 3x$ [bez abs. členu, $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = 0$]
4. Sestavte normovanou kvadratickou rovnici o kořenech x_1, x_2 a přesvědčte se o správnosti:
 $x_1 = 5$ $x_2 = -6$ [$x^2 + x - 30 = 0$]
 $x_1 = -1$ $x_2 = 2$ [$x^2 - x - 2 = 0$]
 $x_1 = 10$ $x_2 = 1$ [$x^2 - 11x + 10 = 0$]
5. Kvadratická rovnice má jeden kořen $x_1 = 2$, druhý kořen má hodnotu čísla převráceného. Sestavte rovnici, která má takovéto 2 kořeny. [$2x^2 - 5x + 2 = 0$]
6. Hodnota diskriminantu následující rovnice je 16. Určete hodnoty parametru **m**.
 $(x - 4)(x + m) = 0$ [$m_1 = 0$; $m_2 = 24$]
 Sestavte pak takovou rovnici. [$x^2 - 4x = 0$; $x^2 + 20x - 96 = 0$]
7. Krátě zlomek a uveďte podmínky
- a) $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ [$x - 3, x \neq -2$]
- b) $\frac{10x^2 + 11x + 3}{2x + 1}$ [$5x + 3, x \neq -0,5$]
- c) $\frac{8x^2 - 6x - 5}{15 - 32x + 16x^2}$ [$\frac{2x + 1}{4x - 3}, x \neq \frac{5}{4}, x \neq \frac{3}{4}$]
- d) $\frac{x^2 - x - 6}{3x^2 + 4x - 4}$ [$\frac{x - 3}{3x - 2}, x \neq -2, x \neq \frac{2}{3}$]
- e) $\frac{-100x^2 + 30x - 2}{3 - 20x - 100x^2}$ [$\frac{x - 0,2}{x + 0,3} \quad x \neq 0,1 \quad x \neq -0,3$]
8. Určete **b, c** tak, aby čísla $x_1 = 3, x_2 = -0,5$ byla kořeny kvadratické rovnice
 $2x^2 + bx + c = 0$ [$b = -5, c = -3$]
9. Určete v kvadratické rovnici $ax^2 + bx + 5 = 0$ koeficienty **a, b** tak, aby kořeny této rovnice byla čísla $x_1 = 5$ $x_2 = 0,5$ [$a = 2, b = -11$]
10. Určete v kvadratické rovnici $ax^2 + 3x + c = 0$ čísla **a, c** tak, aby jejím **jediným (dvojnásobným)** kořenem bylo číslo 2. [$a = -0,75, c = -3$]
11. V rovnici $x^2 + bx - 12 = 0$ s neznámou x je jeden kořen $x_1 = -2$. Určete koeficient **b** a druhý kořen.
 [$b = -4, x_2 = 6$]
12. V rovnici $x^2 - 4x + c = 0$ s neznámou x je jeden kořen $x_1 = 3$. Určete koeficient **c** a druhý kořen.
 [$c = 3, x_2 = 1$]
13. Řešte danou rovnici v $\mathbb{R}$: $\frac{4}{x} - \frac{3 \cdot (x - 7)}{x^2 - 3x} = \frac{x + 1}{x - 3}$ [$x = -3; x \neq 0; 3$]
14. Řešte soustavu lineární a kvadratické rovnice
- a) $x^2 - 3y^2 = -2$
 $x - y = 2$
 [$x_1 = 1 \ y_1 = -1; x_2 = 5 \ y_2 = 3$]
- b) $x^2 + x + 2y = 14$
 $x + 2y = -2$
 [$x_1 = -4 \ y_1 = 1; x_2 = 4 \ y_2 = -3$]
- c) $x^2 + y^2 = 10$
 $x - 2y + 5 = 0$
 [$x_1 = -3 \ y_1 = 1; x_2 = 1 \ y_2 = 3$]
- d) $x^2 + 4y^2 = 16$
 $x - 2y + 4 = 0$
 [$x_1 = -4 \ y_1 = 0; x_2 = 0 \ y_2 = 2$]
- e) $9x^2 - 4y^2 = 36$
 $x + y - 2 = 0$
 [$x_1 = -5,2 \ y_1 = 7,2; x_2 = 2 \ y_2 = 0$]
- f) $x^2 + 9y^2 = 9$
 $x + 3y - 3 = 0$
 [$x_1 = 3 \ y_1 = 0; x_2 = 0 \ y_2 = 1$]

Kvadratické nerovnice

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nejprve rozložte na součin dvou závorek $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice. Pak řešíme jako nerovnici v součinném tvaru.

1. $3x^2 - 7x + 2 \geq 0$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 2; \infty$
2. $5x^2 - 3x - 2 < 0$ $x \in \left(\frac{-2}{5}, 1\right)$
3. $2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1$ $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 2; \infty$
4. $x^2 - x - 6 \leq 0$ $x \in \langle -2, 3 \rangle$